LA HISTORIA COMO UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL

TRABAJO DE GRADO ASOCIADO AL GRUPO DE INVESTIGACIÓN RE-MATE

ADRIÁN FERNANDO RODRÍGUEZ GUZMÁN.

CHRISTIAN DANIEL SANDOVAL GALINDO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2016

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

LA HISTORIA COMO UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL

ADRIÁN FERNANDO RODRÍGUEZ GUZMÁN.
CÓDIGO 2008240062
CC 80751002

CHRISTIAN DANIEL SANDOVAL GALINDO
CÓDIGO 2008240066
CC 1019040583

ASESOR: EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ

Edgar A Guacaneme S.

Trabajo de grado para obtener el título de Licenciados en Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2016

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	La historia como una herramienta didáctica para la enseñanza del concepto de integral. 131 páginas.
Autor(es)	Rodríguez Guzmán, Adrián Fernando; Sandoval Galindo, Christian Daniel.
Director	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016, 131 p
Unidad patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras claves	INTEGRAL, CUADRATURA, ÁREA, HISTORIA DE LA INTEGRAL.

2. Descripción

Este trabajo de grado concluye con un catálogo de propuestas en las que se hace uso de la historia de la integral para la enseñanza de la misma. Para realizar este catálogo primero debimos identificar algunos aspectos del desarrollo histórico asociado al concepto de integral, a través de los cuales logramos reconocer diferentes etapas o momentos que este concepto ha podido tener hasta llegar a ser un objeto de estudio del Cálculo. Teniendo en cuenta lo anterior, procedimos a realizar una búsqueda en la literatura especializada en la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática" en la cual logramos recopilar dichas propuestas, las cuales fueron resumidas, analizadas y catalogadas; de esta manera generamos un catálogo que eventualmente puede ser utilizado por profesores de Matemáticas o maestros en formación, para el diseño de actividades que favorezcan el aprendizaje de la integral en la Educación Media.

3. Fuentes

Para la realización de este trabajo se consultaron diversas fuentes en los cuales lográramos identificar aspectos sobre el desarrollo histórico de la integral y documentos especializados en la relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática”. A continuación mostramos algunas de estas fuentes:

Bobadilla, M. L. (2012). *Constitución histórica de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue: Un tránsito entre lo geométrico y lo analítico*. Tesis de doctorado. Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Escudero, M. (1997). Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. *SUMA*, *24*, 77–79.

Fernández, L. (2011). *La Historia como herramienta didáctica : el concepto de integral*. Tesis de Maestría. Universidad de Cantabria, España.

Flashman, M. E. (1996). Historical Motivation For A Calculus Course: Barrow’s Theorem. In R. Calinger (Ed.) *Vita Mathematica: Historical research and Integration with Teaching* (pp. 309-316). Washington D. C: The Mathemetical Association of America..

Gellasch, A. Shell. (2011). Integration a la Fermat. In D. Jardine & A. S. Gellasch (Eds.), *Mathemtical Time Capsules* (pp. 111–116). Washington D. C.: The Mathemetical Association of America.

Haverhals, N., & Roscoe, M. (2010). The History of Mathematics as a Pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via Mercator’s projection. *Montana Mathematics Enthusiast*, *7*(2-3), 339–368.

Montilla Erazo, J. D. (2014). *El problema del área: De la medida relativa a la medida abstracta*. Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Prabhu, V., & Czarnocha, B. (2008). Los indivisibles en el cálculo contemporáneo. *Educación Matemática*, *20*(1), 53–88.

Sauerheber, R. D. (2010). Geometric Demonstration of the Fundamental Theorems of the Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(3), 397–403.

Sauerheber, R. D. (2012). Teaching the Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(1), 85–100.

4. Contenidos

El documento se organizó en cuatro capítulos, descritos a continuación:

Capítulo 1: Se presenta la justificación de estudio de las matemáticas a través de la historia y en particular de la integral a través de su desarrollo histórico; también planteamos los objetivos y la metodología que direccionó el desarrollo del trabajo.

Capítulo 2: En este se plantea el desarrollo histórico del concepto de integral señalando algunos momentos de la historia en los cuales aparece, lo que nos permitimos considerar como etapas o interpretaciones de la integral. Esta descripción histórica empieza con los antiguos griegos, quienes al enfrentarse al problema de las cuadraturas permiten gestar, por algunos de sus más ilustres representantes, ideas geniales que a la postre fueron el alba del concepto de integral; seguidamente se plantea el trabajo de Kepler, Cavalieri, Wallis, Newton y Leibniz, entre otros personajes que abordaron el estudio de la integral.

Capítulo 3: Inicia el tercer capítulo con la presentación de las revistas, libros y demás fuentes bibliográficas que se consultaron en la búsqueda de propuestas de enseñanza de la integral que hicieran uso de la historia de desarrollo de la misma, las cuales se organizan en forma de tabla; a continuación y producto de tal revisión, se presenta una nueva tabla en la que se presentan las propuestas que consideramos hacen uso de algunos elementos de la historia de la integral para la enseñanza de la misma y se finaliza tal capítulo con la descripción de cada una de las propuestas y su correspondiente análisis a la luz de las siguientes cuestiones: ¿Qué se usó de la historia de las matemáticas? y ¿Cómo se usó la historia de las matemáticas?

Capítulo 4: Se finaliza el cuerpo del documento con el análisis global de las propuestas estudiadas y las conclusiones del trabajo frente a los aportes académicos, profesionales y personales que producto de tal trabajo se obtuvieron.

5. Metodología

Como primera etapa de la metodología realizamos un trabajo de consulta y estudio de documentos que abordaran el desarrollo histórico del concepto de la integral, describiendo los conceptos y teorías que a través del tiempo han surgido en el marco del estudio de tal objeto matemático. En segundo lugar se efectuó la búsqueda de diferentes propuestas para la enseñanza de la integral que contemplaran como eje central el desarrollo histórico del concepto. Tercero, se recopilaron, describieron y analizaron dichas propuestas teniendo en cuenta, qué y cómo fue usada la historia de la integral en cada una de ellas, para finalmente organizar el presente documento que reporta el trabajo realizado y que consideramos puede ser usado por profesores de Matemáticas en ejercicio o formación, para el diseño de actividades que favorezcan el aprendizaje de la integral en la Educación Media e inicios de la Educación Superior.

6. Conclusiones

A continuación mostramos las conclusiones que se refieren a nuestra formación profesional después de la realización de este trabajo y que enunciamos como “conclusiones formativas”:

- Antes de realizar este trabajo, nuestro conocimiento en cuanto a la historia del Cálculo y en específico la historia de la integral era escaso, percibiendo quizás que la integral fue solamente una idea repentina asociada al estudio de unos muy pocos hombres y cuyos legados son el inicio y el final de la historia; sin embargo durante el estudio del desarrollo histórico, comprendimos que la historia de la integral no inicia con los descubrimientos de los matemáticos de los siglos XVII y encontramos que muchos investigadores coinciden en que la historia de la integral se remonta muchos años antes en la antigua Grecia en donde los estudios sobre medición, desencadenaron su evolución y desarrollo, llevando el concepto de integral hasta las concepciones de la actualidad, que ciertamente sigue evolucionando debido a que este siempre tiene algo nuevo para ofrecer.

- Luego de recapitular el desarrollo histórico y estudiar las propuestas que se describen y analizan en este trabajo, tenemos una postura más definida acerca del uso de la Historia de las Matemáticas para mediar su enseñanza y las diversas formas para llevarla al aula de clase. Consideramos que la historia nos ofrece diferentes interpretaciones de un concepto a través del estudio de su evolución, puesto que allí encontramos nociones intuitivas que se han venido desarrollando hasta llegar a conceptos formales; lo que es similar a las experiencias en las clases cuando los estudiantes inician sus primeros cursos de matemáticas. Cuando se lleva al aula las primeras nociones que puede tener un concepto, también se llevan los primeros problemas a los que se enfrentó la humanidad, bien sea en un contexto matemático o en uno en contexto real, haciendo posible mostrar los primeros pasos para el surgimiento de tal concepto. Estamos de acuerdo con la reflexión de Fernández (2011), quien afirma que cuando se usan los diferentes razonamientos que se han realizado a lo largo de la historia para dar respuesta a estos problemas, los estudiantes pueden llegar a comprender la naturaleza del razonamiento matemático, el cual tal vez no se prioriza en las aulas de clase debido a que los objetivos de enseñanza-aprendizaje están centrados en la memorización de definiciones y algoritmos.
- Aunque la línea de investigación "Historia de las Matemáticas – Enseñanza de las Matemáticas" es aceptada en el ámbito educativo, aún son muy escasos los trabajos reportados sobre el uso de la historia de la integral en la enseñanza de la misma. Por lo anterior se hace una invitación a las personas que accedan a este trabajo, para que realicen diferentes propuestas haciendo uso de la historia de la integral con el fin de favorecer el aprendizaje del concepto, permitiendo que los estudiantes perciban la manera en que este surgió a lo largo de la historia de la humanidad, las necesidades a las que en diferentes momentos respondió y las diferentes perspectivas de acuerdo con su evolución.

Elaborado por:	Rodríguez Guzmán, Adrián Fernando; Sandoval Galindo, Christian Daniel.		
Revisado por:	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto.		
Fecha de elaboración del Resumen:	26	1	2016

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado es producto de la investigación, organización y análisis de diversas propuestas didácticas enmarcadas en el campo de la Educación Matemática, en las cuales la Historia de las Matemáticas ha sido eje fundamental para el desarrollo del concepto de integral; trabajo conseguido a través del desarrollo de los siguientes objetivos específicos:

- Decantar hitos fundamentales en el desarrollo histórico del concepto de la integral, desde sus orígenes hasta las diferentes nociones en la actualidad.
- Identificar y analizar documentos que contengan propuestas didácticas en la cuales la historia de la integral sea el fundamento u ocupe un lugar destacado.
- Catalogar las propuestas anteriormente identificadas.

Dentro de la metodología de investigación se realizó una consulta del desarrollo histórico del concepto de integral, seguido de una búsqueda de las diferentes propuestas para su enseñanza fundamentadas en el desarrollo histórico del concepto; también se recopilaron dichas propuestas y se analizaron teniendo en cuenta, qué y cómo fue usada la historia de la integral en cada una de ellas, para finalmente organizar el presente documento que reporta el trabajo realizado y que consideramos puede ser usado por profesores de Matemáticas en ejercicio o formación, para el diseño de actividades que favorezcan el aprendizaje de la integral en la Educación Media e inicios de la Educación Superior.

Este documento se organizó en cuatro capítulos, empezando con la justificación de estudio de las matemáticas a través de la historia y en particular de la integral a través de su desarrollo histórico; también planteamos los objetivos y la metodología que direccionó el desarrollo del trabajo. En el segundo capítulo, se presenta el desarrollo histórico del concepto en el que se señalan algunos momentos de la historia en los cuales aparece lo que nos permitimos considerar como etapas o interpretaciones de la integral; este desarrollo histórico se realiza con base en una interpretación protomatemática del concepto de Integral y es por esto que no se aborda el trabajo de Riemann, quien hace del concepto de integral un objeto de estudio dentro del marco de una teoría establecida. Esta descripción histórica empieza con los antiguos griegos, quienes al enfrentarse al problema de las cuadraturas permiten gestar, por algunos de sus más ilustres representantes, ideas geniales que a la postre fueron el alba del concepto de integral; seguidamente se plantea el trabajo relacionado con los conceptos indivisible e infinitesimal y su relación con el problema de las cuadraturas, señalando a Kepler, como uno de los precursores del concepto de infinitesimal y a Cavalieri quien es reconocido por su método de los indivisibles y quien en *la* Geometría de los indivisibles, presenta un método utilizando procesos algebraicos para calcular cuadraturas de regiones limitadas por curvas, evitando las limitaciones que presentaba el método de exhaución de los griegos; también retomamos a Wallis quien continuando con los trabajos realizados por Descartes y Cavalieri, propone un método para hallar la cuadratura de curvas por medio del método de "inducción incompleta", en el cual se aritmetiza la geometría de Cavalieri. Continuando con el recorrido histórico, se da la aparición de dos de los más importantes personajes en la historia de la integral, Newton y Leibniz, quienes encuentran de manera independiente la relación que existe entre el cálculo de cuadraturas y tangentes. Se finaliza tal capítulo mostrando cómo se va dando al concepto de integral un estatus de noción matemática propiamente dicho, puesto que se amplía el dominio de las funciones integrables más allá de las funciones continuas, dejando de lado la interpretación de la integral como el cálculo de anti-derivadas y mostrando como Cauchy a través de una formalización de conceptos como el de límite, proporciona una definición analítica de la integral y termina por separar la derivada de la integral, definiendo esta última como un límite de sumas.

Inicia el tercer capítulo con la presentación de las revistas, libros y demás fuentes bibliográficas que se consultaron en la búsqueda de propuestas de enseñanza de la integral que hicieran uso de la historia de desarrollo de la misma, las cuales se organizan en forma de tabla; a continuación y producto de tal revisión, se presenta una nueva tabla en la que se presentan las propuestas que, consideramos hacen uso de algunos elementos de la historia de la integral para la enseñanza de la misma y se finaliza tal capitulo con la descripción de cada una de las propuestas y su correspondiente análisis a la luz de las siguientes cuestiones:

- ¿Qué se usó de la historia de las matemáticas?
- ¿Cómo se usó la historia de las matemáticas?

Este "que se usó" está estrechamente ligado al desarrollo histórico planteado en el segundo capítulo y a las interpretaciones que en él se lograron identificar; el "cómo se usó" se ve orientado por un documento del profesor Edgar Alberto Guacaneme Suarez en el cual se clasifica el uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas de la siguiente manera:

- Alusión a la historia de las matemáticas
- Integración de la historia de las matemáticas
- Determinación de la enseñanza a partir de la historia de las matemáticas

Se finaliza el cuerpo del documento con el capítulo 4 en el que se encuentra un análisis global de las propuestas estudiadas y las conclusiones del trabajo frente a los aportes académicos, profesionales y personales que producto de tal trabajo se obtuvieron.

CAPÍTULO 1: GENERALIDADES DEL ESTUDIO

1.1 JUSTIFICACIÓN

Existen diversas opiniones sobre si es o no conveniente enseñar Matemáticas con su historia, por ejemplo Zapico (2006) manifiesta varias razones a favor de esta postura. Al parecer, cuando se muestra la manera como las Matemáticas se van generando y evolucionando a través de los tiempos y se dan a conocer algunos de sus creadores o mayores representantes, esta se muestra como un producto de la actividad humana que se realizó a partir de diferentes intereses (como resolver problemas de la vida cotidiana –problemas prácticos– y necesidades intelectuales – teorización–). En su argumentación este autor cita a de Guzmán (1992), quien afirma que los matemáticos y los profesores de Matemáticas de cualquier nivel deberían tener conocimientos sobre la Historia de las Matemáticas, no solo con la intención de usarlos como instrumento de su propia enseñanza, sino porque la perspectiva histórica conduce de una matemática casi exclusivamente algorítmica, a una llena de grandes historias de hombres con distintas motivaciones y distintas situaciones que la ha ayudado a surgir y desarrollarse.

Por otra parte, tenemos un interés particular en el concepto de integral puesto que este es parte fundamental en el desarrollo del Cálculo y ha estado ligado a la solución de diferentes problemas a lo largo de la historia; el origen del concepto de integral se dio hace varios siglos cuando se presentó la necesidad de resolver problemas de tipo geométrico relacionados con hallar el área de figuras curvas hasta que nuevos problemas relacionados con los fenómenos físicos y los aportes de diferentes matemáticos, propiciaron la evolución de la integral hasta las concepciones actuales. Adicionalmente se ha evidenciado según Azcárate, Bosch, Casadevall, & Casellas (1996) que en la educación secundaria los estudiantes poseen cierto nivel en cuanto a la manipulación de los algoritmos cuando realizan cálculos de primitivas de funciones y sin embargo presentan dificultades frente a la conceptualización de la integral. En su argumentación estos autores citan a Orton (1980) quien afirma que "muchos estudiantes demuestran saber lo que tienen que hacer pero cuando se les pregunta acerca de su método no saben realmente por qué lo hacen de esta manera".

Teniendo en cuenta lo anterior, se realizó un estudio sobre el desarrollo histórico o evolución del concepto de integral según diferentes autores para reconocer, entre otros asuntos, la manera en que este surgió, las necesidades a las que obedeció, las diferentes nociones o estados que le caracterizaron y le caracterizan.

Como parte central de nuestro trabajo, – bajo el entendido de que en la literatura especializada en la relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática” existen estrategias, propuestas y experiencias que involucran la historia de la integral en la enseñanza de la misma, nos interesa recopilar estas, para analizarlas y catalogarlas de acuerdo con los aspectos históricos contemplados.

Se espera así contar con un banco de propuestas a las que recurra el profesor y que al ser llevadas al aula, le permitan a los estudiantes construir algunos aspectos del concepto de integral, quizá de forma similar a como surgió en la historia de la humanidad y abordando necesidades semejantes a las que en su momento atendió. Con ello se estaría ofreciendo al estudiante la posibilidad de conocer las diferentes aspectos de la integral y los problemas a los que daban solución cada una de estas; quizá de esta manera los estudiantes logren identificar el concepto de integral como un objeto/proceso en continuo desarrollo; puesto que según González-Urbaneja (2004) citando a Nolla (2001) los conceptos e ideas matemáticas que se tratan en la educación secundaria son presentados a los estudiantes como algo cerrado, acabado, ajeno y alejado de los diversos tipos de problemas prácticos o teóricos pertenecientes a otras disciplinas o a la propia matemática.

Suponemos entonces que la historia de la integral se convierte a través de tales propuestas y tareas, en un agente activo en la enseñanza de la integral y evita la trivialización de este concepto y la pérdida de sus significados. Con respecto a esto podemos señalar que a partir de un estudio realizado en el curso “Tópicos de Historia de las Matemáticas” del programa de licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional desarrollado en el segundo semestre de 2014, hemos reconocido que ello puede suceder con otros conceptos en la Educación Básica y Media, puesto que se ha evidenciado que en el colegio se degrada el Teorema de Pitágoras a un simple algoritmo que me permite hallar la longitud de uno de los lados de un triángulo rectángulo a partir de la longitudes de los otros dos lados, sin dimensionar, por ejemplo, el hecho de que es el teorema que más y más variadas demostraciones tiene y es un teorema que tiene generalizaciones realmente interesantes.

Con base en lo anterior y siendo conscientes de la pertinencia del uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las mismas, las propuestas aquí recopiladas servirán de consulta para profesores de Matemáticas en formación o en ejercicio.

1.2 OBJETIVOS

Para la realización del presente trabajo planteamos inicialmente el objetivo general y los específicos, en los cuales podemos distinguir cada una de las tareas específicas que debemos realizar, como por ejemplo la consulta del desarrollo histórico del concepto de integral y la búsqueda de las propuestas fundamentadas en la historia, para así lograr la finalización y divulgación del presente trabajo de grado.

1.2.1 Objetivo general

Investigar, analizar y catalogar diferentes propuestas didácticas en la cuales la historia de la integral ha tenido un papel trascendental para el desarrollo de este concepto, generando a partir de dicha indagación un documento que eventualmente pueda ser usado por profesores de Matemáticas o maestros en formación, para el diseño de actividades que favorezcan el aprendizaje de la integral en la Educación Media.

1.2.2 Objetivos específicos

- Decantar hitos fundamentales en el desarrollo histórico del concepto de integral, desde sus orígenes hasta las diferentes nociones en la actualidad.
- Identificar y analizar documentos que contengan propuestas de enseñanza en la cuales la historia de la integral sea el fundamento u ocupe un lugar destacado.
- Generar un documento que permita recopilar y catalogar las propuestas anteriormente identificadas, que pueda ser objeto de consulta y trabajo por profesores de Matemáticas en formación o en ejercicio.

1.3 METODOLOGÍA

Como primera etapa de la metodología realizamos un trabajo de consulta y estudio de documentos que abordaran el desarrollo histórico del concepto de la integral, describiendo los conceptos y teorías que a través del tiempo han surgido en el marco del estudio de tal objeto matemático; en segundo lugar se efectuó la búsqueda de diferentes propuestas para la enseñanza de la integral que contemplaran como eje central el desarrollo histórico del concepto; tercero, se recopilaron, describieron y analizaron dichas propuestas teniendo en cuenta, qué y cómo fue usada la historia de la integral en cada una de ellas, para finalmente organizar el presente documento que reporta el trabajo realizado y que consideramos puede ser usado por profesores de Matemáticas en ejercicio o formación, para el diseño de actividades que favorezcan el aprendizaje de la integral en la Educación Media e inicios de la Educación Superior.

CAPÍTULO 2: ELEMENTOS DE LA HISTORIA DE LA INTEGRAL

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo encontramos el desarrollo histórico asociado al concepto de integral, en el cual presentamos algunos hechos y personajes que realizaron numerosos trabajos en diferentes épocas y culturas a través de la historia, los cuales aportaron a las diferentes etapas en la constitución del concepto de integral; sin embargo no se abordan los trabajos de Riemann, puesto que en ellos el concepto de Integral es un objeto de estudio dentro del marco de una teoría establecida y es de nuestro interés identificar las etapas protomatemáticas del concepto de Integral y en consecuencia las primeras versiones de algunos teoremas fundamentales asociados a este concepto. Para la realización de este capítulo se tomaron como referencias principales los trabajos de Bobadilla (2012) y Montilla Erazo (2014), los cuales tienen como eje común el análisis, desde una visión histórico-epistemológica, del problema de la medida de superficies, el cual está directamente relacionado con el desarrollo del concepto de integral. Estos autores presentan los métodos y resultados de los matemáticos más representativos que trataron este problema, desde los antiguos griegos hasta la modernidad. Algunas de las demostraciones, que se presentan en este capítulo, fueron realizadas con base en los trabajos de diferentes autores como los ya mencionados, sin embargo fue necesario agregar pasos intermedios para lograr una mayor comprensión.

Para realizar este capítulo se tuvo en cuenta los resultados de los matemáticos desde la antigua Grecia hasta los matemáticos del siglo XIX, en este recorrido histórico podremos observar que con la aparición de nuevos conceptos e ideas, fue necesario renovar algunas teorías establecidas, para así obtener nuevas posibilidades de estudios; un ejemplo de ello es el caso de la aparición del concepto de inconmensurabilidad, en la antigua Grecia, el cual dio paso a nuevas teorías que lograron capturar este concepto con las cuales surgió particularmente el método de exhaución el cual fue pilar en el proceso de hallar la cuadratura de una curva. También podremos encontrar que los trabajos presentados por algunos matemáticos no siempre fueron aceptados por la comunidad académica, aunque algunos de estos fueron fundamentales para sus sucesores; es el caso del trabajo sobre los indivisibles presentados por Cavalieri, el cual le valió a este fuertes críticas por parte de otros matemáticos, dado que ellos se fundamentaban en que toda magnitud geométrica es homogénea, es decir que la suma de segmentos es un segmento y la suma de planos es un plano y la idea de Cavalieri contradecía tales proposiciones. En general en este capítulo encontraremos algunos de los trabajos que contribuyeron al desarrollo del concepto de integral y se evidenciará como el problema de las cuadraturas pasó de ser un problema de tipo geométrico a uno de tipo analítico. El recorrido histórico está dividido en cuatro partes, teniendo en cuenta la época histórica y las diferentes acepciones que creemos tuvo el concepto de integral a medida que evolucionaba históricamente.

En la primera parte reunimos los trabajos de los griegos que más se destacaron en la búsqueda de cuadraturas; entre ellos se encuentran: Hipócrates, el cual buscó la cuadratura de las lúnulas en un intento de lograr la cuadratura del círculo; Eudoxo, quien encuentra una salida a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable por medio de una nueva definición de igualdad de razones, el axioma de continuidad y el método de exhaución y Arquímedes, quien retoma y potencializa las ideas del método de exhaución de Eudoxo, logrando calcular áreas de figuras curvilíneas, como es el caso del segmento de parábola; Arquímedes también usa para calcular área de figuras curvilíneas el método mecánico, el cual combina la Geometría con las leyes de la mecánica; estos dos métodos originan las concepciones de los infinitesimales e indivisibles respectivamente.

En la segunda parte presentamos los conceptos de indivisibles e infinitesimales, los cuales ofrecen diferentes perspectivas para abordar el problema de las cuadraturas. Entre los matemáticos que presentaron estos conceptos encontramos a: Kepler, quien sin duda es uno de los precursores del concepto de infinitesimal; Cavalieri, quien es reconocido por su método de los indivisibles y quien en *la Geometría de los indivisibles*, presenta un método utilizando procesos algebraicos para calcular cuadraturas de regiones limitadas por curvas, evitando las limitaciones que presentaba el método de exhaución de los griegos; y Wallis, quien continuando con los trabajos realizados por Descartes y Cavalieri, propone un método para hallar la cuadratura de curvas por medio del método de "inducción incompleta", en el cual observamos cómo se aritmetiza la Geometría de Cavalieri; es decir que asocia números a los elementos indivisibles. Con Wallis se produce un gran salto conceptual en cuanto a medir áreas, puesto que establece el área de un rectángulo, como el producto de la base por la altura y dado a este producto es la primera vez que a la superficie se le asigna un número como su medida.

En la tercera parte observamos que debido a la buena aceptación del trabajo de Descartes por parte de otros matemáticos, las expresiones algebraicas se impusieron frente a las representaciones geométricas y se estableció una relación entre la Geometría y el joven Análisis. Debido a esto se amplió en gran consideración el conjunto de curvas y en consecuencia era necesario generar nuevos métodos para encontrar la cuadratura de estas curvas. Es en este contexto en el que hacen aparición dos de los más importantes personajes en la historia de la integral, Newton y Leibniz, quienes encuentran de manera independiente la relación que existe entre el cálculo de cuadraturas y tangentes. Newton y Leibniz retomando las ideas y métodos de sus antecesores, crearon un método con el cual se podía calcular la cuadratura de cualquier curva.

En la cuarta parte se muestra cómo se va dando al concepto de integral un estatus de noción matemática, puesto que se amplía el dominio de las funciones integrables más allá de las funciones continuas, dejando de lado la interpretación de la integral como el cálculo de anti-derivadas. La representación de las funciones en series le da a la integral una nueva perspectiva puesto que le permite abandonar, por lo menos momentáneamente, su interpretación geométrica; además se dedican grandes esfuerzos a establecer las condiciones que debía cumplir una función para ser representada en series trigonométricas, siendo una de estas que la función fuera integrable en un intervalo dado. Enseguida se muestra como Cauchy a través de una formalización de conceptos como el de límite, proporciona una definición analítica de la integral y termina por separar la derivada de la integral y definiendo esta última como un límite de sumas.

2.2 LA BÚSQUEDA DE CUADRATURAS EN LA ANTIGUA GRECIA

2.2.1 Las lúnulas de Hipócrates de Quíos

En la antigua Grecia se era consciente que dos figuras bidimensionales aunque no sean iguales pueden llegar a tener superficies equivalentes, por lo tanto se tenía la posibilidad de medir una figura en comparación con otra y de esta manera los griegos se enfocaron en establecer los cuadrados de las diferentes figuras; es decir para los griegos el problema de calcular el área consistía en hallar básicamente el cuadrado cuya superficie sea equivalente a cualquier superficie plana y acotada.

En el siglo V a.C. Hipócrates de Quios busca la cuadratura de ciertas figuras curvilíneas llamadas lúnulas en un intento de lograr la cuadratura del círculo. Una lúnula es una figura limitada por dos arcos (ver Figura 1); las lúnulas son construibles intersecando dos círculos pero con la condición que ninguno sea subconjunto propio del otro.

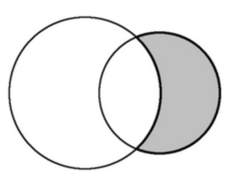


Figura 1: Lúnula

Para mostrar la cuadratura de la lúnula Hipócrates usa la proposición:

Segmentos circulares semejantes están entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus bases[1]

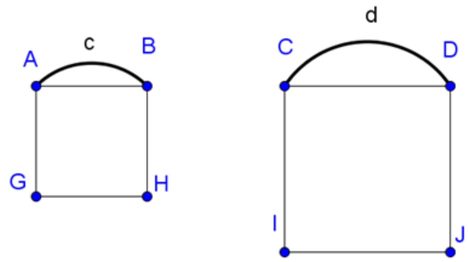


Figura 2: Proposición de Hipócrates

En la **Figura 2** observamos según la proposición de Hipócrates que:

$$segmento\ circular\ AB: segmento\ circular\ CD :: AB^2: CD^2$$

Hipócrates logra demostrar que la cuadratura de la lúnula es equivalente a la cuadratura de un triángulo isósceles de la siguiente manera:[2]

Construyamos un cuadrado $ABCD$ y con centro en la diagonal AC se traza el arco ABC y con centro en D se traza el arco AC.

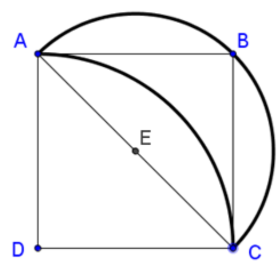


Figura 3: Cuadratura de la lúnula

Los segmentos circulares $AC\ y\ AB$ son semejantes entonces, están en la misma razón que los cuadrados de sus bases. Usando el teorema de Pitágoras verificamos que la razón entre el cuadrado del segmento AB y el cuadrado de la diagonal AC, es del doble; es decir que el cuadrado de la diagonal AC es el doble que el cuadrado del segmento AB, por lo tanto el área del segmento de círculo AC es equivalente a la suma de las áreas de los segmentos de circulo AB y BC. Si del área del semicírculo ABC quitamos el área del segmento de círculo

[1] Tomado de Montilla Erazo (2014, p.22)

[2] Descripción basada en Montilla Erazo (2014, p.22)

AC, obtenemos el área de la lúnula y si del semicírculo ABC quitamos el área de los segmentos de círculo AB y BC, obtenemos el área del triángulo ABC; como en ambos casos quitamos áreas equivalentes podemos concluir que el área de la lúnula es equivalente al área del triángulo ABC y la cual es equivalente al área del cuadrado de lado $\frac{AC}{2}$. De esta manera Hipócrates realiza la cuadratura de la lúnula.

2.2.2 El método de exhaución de Eudoxo

Según González Urbaneja (2008) el concepto de número de los pitagóricos no permitía asignar a cualquier figura geométrica un valor que representara la medida de su área o volumen, es por esto que los griegos debieron calcular con figuras que se podían medir. Para realizar la cuadratura de una curva, Eudoxo debía encontrar su razón con otra figura conocida, es por esto que desarrollo una teoría de magnitudes y proporciones la cual se hacía necesaria por el descubrimiento de los inconmensurables.

Puesto que las magnitudes geométricas por su naturaleza continua no se consideraban medibles con números, se dio la aparición y reconocimiento de los inconmensurables por parte de los griegos, exigiendo una renovación a la matemática pitagórica. Eudoxo de Cnido, matemático de la academia Platónica, introduce la idea: “tan pequeño como se quiera”, idea comparable en la actualidad como el “paso al límite” según González Urbaneja (2008), encuentra una salida a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable de la siguiente manera:

- Una definición de proporción
- Un axioma: axioma de Eudoxo-Arquímedes o axioma de continuidad
- Un método: el método de exhaución

Como la razón entre dos magnitudes inconmensurables se consideraba inexpresable para los griegos, Eudoxo elimina tal dificultad pasando de razones a proporciones, definiéndola según González Urbaneja (2008) de la siguiente forma (Definición V.5 de elementos de Euclides):

> Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente (p.113).

En otras palabras, sí a, b son dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c, d son también del mismo tipo (pero no necesariamente del mismo tipo de a, b), Eudoxo define: $a: b :: c: d$ cuando para cualquier par de enteros positivos $n\ y\ m$ se tiene:

$na > mb$ y $nc > md$ ó $na = mb$ y $nc = md$ ó $na < mb$ y $nc < md$

Observemos que no se menciona la naturaleza conmensurable o inconmensurable de las magnitudes geométricas puesto que la definición de Eudoxo aplica para ambas.

Eudoxo omite cualquier alusión al número irracional y opera con magnitudes que se pueden hacer menores que otras prefijadas para lo que introduce según González Urbaneja (2008) lo que hoy llamamos el "axioma de Eudoxo-Arquímedes" o "axioma de continuidad" (Definición V.4 de Elementos de Euclides): "Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra"(p. 113).

Arquímedes considero esta definición como un principio, postulado o axioma y de ahí el nombre con el que ha pasado a la literatura matemática. Según González Urbaneja (2008) Arquímedes lo enuncia en el postulado 5 del libro I de su obra *Sobre la esfera y el cilindro:*

> Dadas dos líneas, dos superficies o dos solidos desiguales, la mayor de estas figuras excede a la menor en una magnitud tal que, añadida a sí misma, es capaz de exceder cualquier magnitud propuesta de las que decimos que guardan razón (p.116).

El axioma de Eudoxo–Arquímedes o axioma de continuidad, es determinante en la teoría de la proporción de Eudoxo del libro V de *Los Elementos* de Euclides, en el estudio del cálculo con proporciones. La teoría de la proporción forjada por Eudoxo permitió a la matemática griega usar razones de magnitudes geométricas conmensurables o inconmensurables, de la misma forma que la matemática actual opera con cualquier número real. Este axioma de continuidad tiene como fin establecer magnitudes "tan grandes o tan pequeñas como se desee" (pero excluye las infinitamente grandes y los infinitamente pequeños).

En la Geometría griega se consideraba que las figuras curvilíneas como círculos o segmentos de parábola tienen áreas que son magnitudes geométricas del mismo tipo que las figuras poligonales. Si se desea determinar el área de una figura curvilínea *A*, se debe buscar una sucesión de polígonos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, ..\}$ que aproximen progresivamente el área de *A*. Eudoxo y su método de exhaución lleva a la idea de la magnitud de un área o volumen de *A* como el "límite" de las áreas de los polígonos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, ..\}$; para ello se intenta demostrar que se puede encontrar un polígono en la sucesión $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, ..\}$ cuya área difiera del área de la figura A en una cantidad menor que otra prefijada, en otros términos que la diferencia sea "tan pequeña como se quiera":

Dada una cantidad infinitamente pequeña c, se debe encontrar un polígono p_n de tal manera que la diferencia $a(A) - (p_n)$ sea menor que c, para un n suficientemente grande.

Para encontrar p_n es necesario remitirnos a la proposición X.1 de *Elementos* de Euclides y la cual el mismo Euclides la demuestra usando el axioma Eudoxo–Arquímedes:

Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Sean R_0 y una cantidad infinitamente pequeña c, dos magnitudes dadas

Si $\{R_1, R_2, R_3, ..\}$ es una sucesión de magnitudes de tal forma que:

$R_1 < \frac{1}{2}R_0$,$R_2 < \frac{1}{2}R_1$, $R_3 < \frac{1}{2}R_2$, ...

Entonces se puede encontrar un natural n para el que $R_n < c$

Según el axioma de Eudoxo – Arquímedes, podemos hallar un entero positivo N tal que $(N+1)c > R_0$

Entonces se tiene: $R_1 < \frac{1}{2}R_0 < \frac{1}{2}(N+1)c < Nc$

Análogamente $R_2 < \frac{1}{2}R_1 < \frac{1}{2}Nc < (N-1)c$

Y sucesivamente se llega en los N pasos a la desigualdad deseada: $R_n < c$

El enunciado de la proposición X.1, que es conocido por algunos historiadores como "principio de Eudoxo", da inicio al método de exhaución. Con el cual según González Urbaneja (2008) Eudoxo demuestra rigurosamente los teoremas sobre el círculo, la pirámide y el cono, enunciados por Hipócrates y Demócrito y que aparecen en *Elementos* de Euclides:

Proposición II (libro XII): Los círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros.

Proposición VII (libro XII): Cualquier prisma que tenga como base un triángulo se divide en tres prismas iguales entre sí que tienen triángulos como base.

Proposición X (libro XII): Cualquier cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base y la misma altura.

Si inscribimos un cuadrado en un círculo, la diferencia entre ambos es menor que la mitad del área del círculo, puesto que el cuadrado inscrito es la mitad del cuadrado circunscrito.

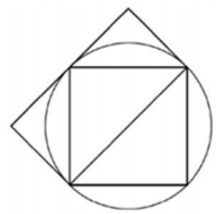


Figura 4: Inscripición del cuadrado

Sobre cada lado del cuadrado se construye un triángulo isósceles y obtenemos un octágono regular inscrito en el círculo:

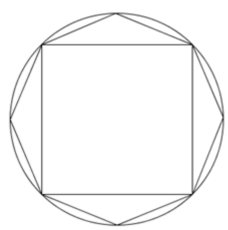


Figura 5: Exhaución del Círculo

Se pude observar que la diferencia entre cada sector circular (determinado por el lado del cuadrado y el círculo) y el triángulo isósceles que determinan los lados del octágono, es menor que la mitad del sector circular. Si reiteramos este proceso, se resta reiteradamente a una cantidad otra cantidad superior a su mitad (primero, al círculo se le resta el cuadrado inscrito, en segundo lugar, a los sectores circulares resultantes se les restan los triángulos isósceles que determinan el octógono, y así sucesivamente); aplicando el principio de Eudoxo, alcanzaremos un polígono inscrito, cuya diferencia con el círculo "es tan pequeña como se desee".

De esta manera, se obtiene el "lema de exhaución del círculo", que simbólicamente se expresa en la forma:

Dado un círculo C y una cantidad infinitamente pequeña e, se puede encontrar un polígono regular P inscrito en e de tal modo que, si al área del círculo $a(C)$ $a < \varepsilon$ le restamos el área del polígono inscrito a(P), esta diferencia debe ser menor que e.

2.2.3 El método de exhaución en los tiempos de Arquímedes

Arquímedes (287-212), al igual que sus antecesores, continúa trabajando en calcular el área de figuras curvilíneas por medio de la comparación de áreas ya conocidas y estas figuras; para el caso de calcular el área de un segmento parabólico, Arquímedes usa el método de exhaución de Eudoxo. Según Bobadilla (2012) Arquímedes retoma y potencializa este método haciendo que el "límite" de las medidas de las áreas de una sucesión de polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia o en un segmento de parábola, sea el área del círculo o del segmento de parábola anteriormente mencionado. Para comprender mejor cómo concebía Arquímedes el método de exhaución nos permitimos mostrar una clasificación que hace Bobadilla (2012), citando a Montesinos (1992) quien cita a Dijksterhuis, y ubicar la forma de proceder de este magnífico matemático en una de dichas clasificaciones:

- Aproximación: en la que inscribimos una serie de polígonos regulares en la figura curva de la cual queremos conocer su área y buscamos, haciendo aumentar el número de lados del polígono progresivamente, que la diferencia entre las áreas de los polígonos y la figura curva sea menor que cualquier cantidad dada.
- Comprensión-Diferencia: en la que encerramos la figura curvilínea mediante sucesiones de polígonos inscritos y circunscritos de tal manera que la diferencia entre ellos sea menor que cualquier cantidad dada.
- Comprensión- división: en la que nuevamente encerramos la figura curvilínea mediante sucesiones de polígonos inscritos y circunscritos de tal manera que la razón entre las áreas de estos polígonos se aproxime a la unidad a medida que aumentamos el número de lados de los polígonos.

Dada esta clasificación podemos deducir que Arquímedes propone el método de exhaución Comprensión-diferencia por medio del cual pudo hacer grandes avances matemáticos, para la época, como encontrar una óptima aproximación de π.

En lo que respecta al cálculo de áreas de figuras curvilíneas, Arquímedes usa el método de exhaución para hallar la cuadratura de un segmento de parábola y demuestra según Bobadilla (2012) la proposición 24 "El área del segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento"(p.36); para tal demostración Arquímedes utiliza algunas proposiciones que se encuentran en el libro sobre cónicas de Euclides:

> Proposición 1: Dada una parábola y un punto P que pertenece a esta, si trazamos $\overleftrightarrow{PV}$ tangente a la parábola, luego $\overleftrightarrow{QR} \parallel \overleftrightarrow{PV}$ y secante a la parábola, si en seguida trazamos una recta paralela al eje de la parábola y que pase por P, entonces XR y XQ son iguales siendo X el punto de intersección entre la recta paralela al eje y $\overline{QR}$.

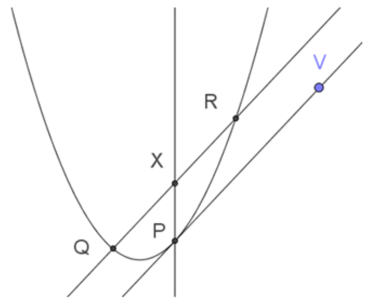


Figura 6: Proposición 1

1. Proposición 3: si por un punto B de una parábola trazamos $\overleftrightarrow{BE}$, que sea paralela al eje o que contenga a este y si por otros dos puntos de la parábola D y C trazamos rectas paralelas a la recta tangente que pasa por B entonces BE : BF :: $EC^2 : FG^2$

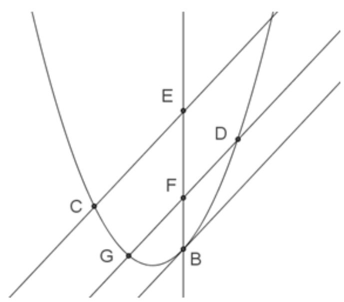


Figura 7: Proposición 3

2. Proposición 19: Dado un segmento parabólico, si P es el vértice de este, R un punto en el mismo y $\overleftrightarrow{RK} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ y tangente a la parábola, al trazar $\overline{RM}$ paralelo al eje siendo M el punto de intersección entre $\overline{RM}$ y $\overline{QQ'}$ entonces $\overline{PV} : \overline{RM} : 4 : 3$

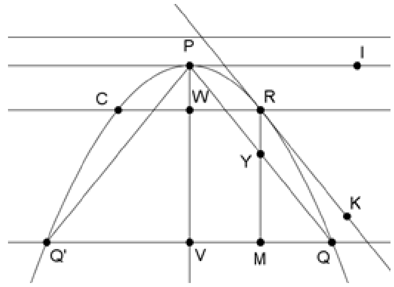


Figura 8: Proposición 19

3. Proposición 21: sea QQ' la base de un segmento parabólico QPQ', y P el vértice de dicho segmento. Sea R un punto en el segmento parabólico en el cual la tangente es paralela a PQ, entonces la medida de la superficie del triángulo QPQ' es 8 veces la del triángulo QRP

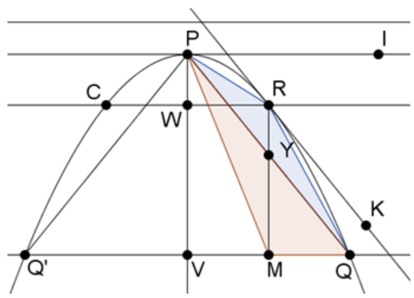


Figura 9: Proposición 21

4. Proposición 23: Dada una sucesión finita de áreas $A, B, C, D \cdots, Y, Z$ de las cuales A es la mayor y cada una es cuatro veces la siguiente, entonces: $A + B + C + D + \cdots + Y + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$

Con estas proposiciones y el método de exhaución vamos a demostrar de manera similar a como realizó Arquímedes la siguiente proposición:

Dado un segmento parabólico y un triángulo inscrito en este, la medida de la superficie de la parábola es a la medida de la superficie del triángulo como 4 es a 3

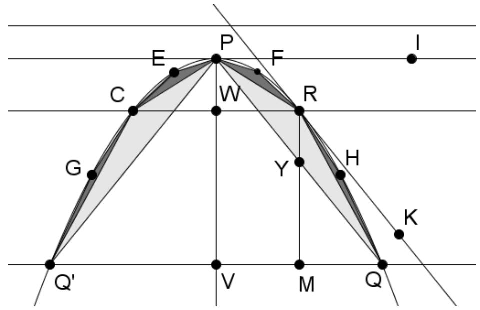


Figura 10: Cuadratura de la parábola

Gracias a la proposición 21 podemos afirmar que la superficie del triángulo PRQ es la octava parte de la superficie del triángulo PQQ' al igual que el área del triángulo PCQ', por cual podemos afirmar que la suma de las medidas de las superficies anteriormente mencionadas es la cuarta parte del triángulo PQQ' y continuando con el mismo proceso se puede afirmar que:

$$PQQ'\colon 8 :: RQP\colon 1$$

$$PQQ'\colon 8 :: CPQ'\colon 1$$

$$PQQ'\colon 4 :: CPQ' + RQP\colon 1$$

$$FPR\colon 1 :: PQQ'\colon 8^2$$

$$FPR + HRQ + EPC + GCQ' :: PQQ'\colon 4^2$$

Así que para hallar la superficie del segmento parabólico basta con sumar la superficie de los triángulos que van resultando al repetir el proceso de forma infinita[3], por lo Arquímedes se encuentra frente a una suma de la siguiente manera:

$$PQQ' + \frac{1}{4}PQQ' + \frac{1}{4^2}PQQ' \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}PQQ'$$

Dado que Arquímedes no contaba con las herramientas actuales del cálculo para hallar el resultado de tal suma, recurre a la proposición 23 y obtiene lo siguiente:

$$PQQ' + \frac{1}{4}PQQ' + \frac{1}{4^2}PQQ' \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}PQQ' + \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}PQQ' = \frac{4}{3}PQQ'$$

[3] cabe anotar que aquí se hace referencia a un infinito potencial y no a un infinito real o actual

Luego de haber obtenido el resultado de dicha suma Arquímedes demuestra que esta es igual a la medida de la superficie del segmento de parábola de la siguiente manera:

Primero nombra la medida de la superficie como S y por medio de una reducción al absurdo llega al resultado deseado de la siguiente manera: $S \geq \frac{4}{3}PQQ' \wedge S \leq \frac{4}{3}PQQ'$

Si esto sucede es porque $S: 1 :: 4PQQ': 3$

Por demostrar que $S > \frac{4}{3}PQQ'$

y Arquímedes empieza con el siguiente razonamiento si S es mayor a $\frac{4}{3}PQQ'$ entonces en algún momento en el proceso anteriormente descrito encontraremos un polígono de m lados tal que la medida de la superficie de este sea menos que s y mayor que $\frac{4}{3}PQQ'$ y además:

$$S > \frac{4}{3}PQQ'$$

$$\exists\ A, A\ la\ medida\ de\ una\ superficie / A > \frac{4}{3}PQQ'$$

$$A < S$$

Dada la naturaleza de A se podría escribirla de la siguiente manera:

$$A = PQQ' + \frac{1}{4}PQQ' + \frac{1}{4^2}PQQ' \cdots + \frac{1}{4^{m-1}}PQQ'$$

Y haciendo uso de la proposición 23 tendría:

$$\frac{4}{3}PQQ' = A + \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}PQQ'$$

$$A < \frac{4}{3}PQQ'$$

Lo cual conduce a una contradicción.

Ahora se demuestra que si $S < \frac{4}{3}PQQ'$ también se presenta una contradicción, así:

$Si\ S < \frac{4}{3}PQQ'$ entonces $\frac{4}{3}PQQ' - S > 0$ y por tanto $\frac{4}{3}PQQ' - S = A_m$, donde A_m es la medida de la superficie luego de la m-sima repetición del proceso, siendo esta además el resto que obtenemos al hacer la diferencia entre $\frac{4}{3}PQQ'$ y S, luego:

$$A_m = \frac{A}{4^{m-1}}$$

$$\frac{1}{3}A_m = \frac{1}{3}\frac{A}{4^{m-1}}$$

$$A_m > \frac{1}{3}A_m$$

$$\frac{A}{4^{m-1}} > \frac{1}{3}\frac{A}{4^{m-1}}$$

Y por la proposición 23 se concluye que:

$$\frac{1}{3}\frac{A}{4^{m-1}} = \frac{4}{3}A - (A + \frac{A}{4} + \cdots + \frac{A}{4^{m-1}})$$

$$S < (A + \frac{A}{4} + \cdots + \frac{A}{4^{m-1}})$$

Como $(A + \frac{A}{4} + \cdots + \frac{A}{4^{m-1}})$ es una suma parcial de triángulos inscritos en la parábola no puede ser mayor a la superficie de la parábola. Razón por la cual S deber ser igual a $\frac{4}{3}PQQ'$

2.3 LA REVOLUCIÓN DE LOS INFINITESIMALES Y LOS INDIVISIBLES

2.3.1 Los infinitesimales de Kepler

Johannes Kepler (1571-1630), es sin duda alguna un precursor del concepto de infinitesimales que como veremos más adelante resultó fundamental para el desarrollo del Cálculo Integral. Para Kepler el infinitesimal es un elemento muy pequeño que hace parte de una figura cualquiera y como parte importante conserva la dimensión de esta. En sus trabajos de astronomía plantea que los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo orbitas elípticas, situando el Sol en uno de los focos de estas y que las áreas barridas por los radios con extremos en el Sol y los planetas son proporcionales al tiempo empleado por estos en recorrer su órbita. Para llegar a estas conclusiones, según Boyer (1987), Kepler suponía que el área estaba formada por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol y los otros dos en puntos infinitamente próximos o cercanos a la órbita del planeta.

Según Montilla Erazo (2014), Kepler en su trabajo *La nova Stereometria* sobre el cálculo de áreas y volúmenes, resuelve el antiguo problema de hallar el área del círculo usando sus infinitesimales, considerando así al círculo como un polígono regular con infinitos lados y constituido por infinitos triángulos, cada uno de ellos con vértice en el origen y con alturas aproximadamente iguales al radio de la circunferencia. Sean C y r la longitud de la circunferencia y su radio respectivamente, si $b_1, b_2 b_3, \dots, b_n$ son las longitudes de las bases de los triángulos infinitesimales, entonces el área del círculo es:

$$A = \frac{(b_1 r + b_2 r + \cdots + b_n r)}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} r(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$A = \frac{1}{2} rC$$

Vemos que Kepler ofrece un método diferente al ofrecido por Arquímedes para abordar problemas de áreas y volúmenes; sin embargo estos métodos estaban lejos de la rigurosidad matemática de la época y según Montilla Erazo (2014), Kepler era consciente de esto, pero a pesar de ello sus trabajos fueron seguidos por varios matemáticos.

2.3.2 Los indivisibles de Cavalieri

Como mencionamos anteriormente los infinitesimales tienen origen en el método de exhaución de los griegos y luego Kepler los definió como un elemento que compone la figura y que tiene la misma dimensión que esta. Un ejemplo de estos infinitesimales se puede ver con el área del círculo la cual está compuesta por infinitos triángulos con vértice en el centro del círculo y con una base extremadamente pequeña. Según Bobadilla (2012) en oposición a esta noción aparece la idea de los indivisibles de Bonaventura Cavalieri (1591-1647), los cuales no son elementos infinitamente pequeños, pero sí son infinitos y poseen una dimensión menor de la figura que componen, la suma de todos estos infinitos elementos constituyen el total de la figura.

Cavalieri fue según Montilla Erazo (2014), el matemático más destacado del siglo XVII, por contribuir de manera significativa al cálculo de áreas y volúmenes de ciertos objetos geométricos, Cavalieri sin duda es reconocido por su método de los indivisibles, presentado en una de sus obras más importantes *La Geometría de los indivisible*. En este presenta un método para medir los objetos geométricos a través de sus indivisibles y de esta manera evitar las limitaciones que presentaba el método de exhaución de los griegos, pero fundamentada en los procesos infinitesimales de Kepler, Bobadilla (2012) citando a Brunschvicg (1929, p.192), plantea que:

> Cavalieri sustituye la evaluación de una suma infinita de elementos infinitamente pequeños, que se hacía con el método de exhaución, por la razón entre dos sumas infinitas de elementos finitos, en número ilimitado. Puesto que los elementos finitos de los términos de la razón pueden ser representados, mientras que los elementos infinitamente pequeños de la suma no podrían serlo (p.40).

Para Cavalieri los indivisibles en figuras planas son la colección de todas las líneas contenidas en la figura y que son paralelas a otra llamada Regula. Observemos el segmento parabólico ABC en el que el segmento AC es la regula:

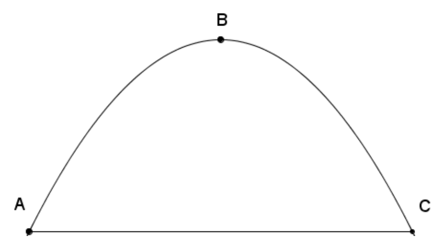


Figura 11: Regula

Ahora observemos algunos elementos de la colección de todas las líneas que generan el segmento parabólico ABC y que son paralelas a la regula.

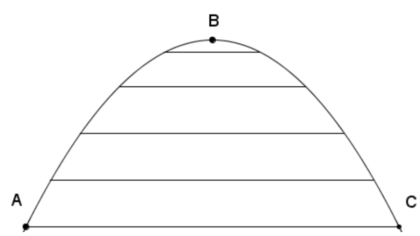


Figura 12: Líneas paralelas

Sin embargo para obtener la totalidad de la figura y en efecto la colección de "todas las líneas" debemos generar un plano móvil que se desplazará entre la regula y su tangente opuesta, de esta la intersección entre el plano y la figura generará, como ya mencionamos, la colección de "todas las líneas" de la figura.

Observemos que el segmento de parábola ABC posee una dimensión 2 y la colección de todas las líneas paralelas a la regula (indivisibles) poseen dimensión 1. Para figuras que poseen dimensión 3, como es el caso de un paraboloide, la intersección entre los planos y el paraboloide constituyen los indivisibles.

Nótese que para encontrar la colección de “todas las líneas” es necesario implementar el movimiento de un plano entre dos tangentes opuestas y hasta el momento es una forma de garantizar que no queden “huecos” en la figura al generarla. Se podría decir que la idea de continuidad empezaba a hacerse necesaria en este tipo de problemas; es por esto que precisamente su trabajo empieza a ser muy cuestionado entre la comunidad matemática y filosófica debido al cuestionamiento sobre el uso del continuo.

En Montilla Erazo (2014) se realiza una contextualización sobre los pensamientos filosóficos más sobresalientes del siglo XVII, en los cuales se retomaban las ideas de personajes de la talla de Demócrito y Aristóteles. Demócrito afirmaba que los cuerpos físicos, están constituidos en última instancia por átomos indivisibles; por el contrario Aristóteles pensaba que lo continuo puede ser dividido ilimitadamente únicamente en elementos de la misma naturaleza y esto conlleva a que sería imposible dividirlo en elementos indivisibles, por lo que desde el punto de vista de los aristotélicos, una línea no puede estar constituido de puntos o que una superficie plana acotada está constituido de lo que Cavalieri llama “todas las líneas”. Aunque el pensamiento aristotélico fue más acogido entre los llamados estudiosos, las ideas atomistas de Demócrito fueron adoptadas por algunos matemáticos como Arquímedes, Kepler y Galileo.

Aunque pareciera que Cavalieri se inclinara más por el pensamiento atomista, debido a sus indivisibles, al parecer tenía una posición según Montilla Erazo (2014), ambivalente, en la que sostiene que los indivisibles no constituyen el continuo, también considera que son una herramienta para realizar el cálculo de las cuadraturas.

Un aspecto fundamental en la Geometría de los indivisibles es el llamado *principio de Cavalieri*, que se enuncia en el libro VII de la *Geometría*, en el que se establece la relación entre los objetos volumétricos y sus indivisibles. Con base en la **Figura 13** enunciemos la versión directa del principio de Cavalieri aplicado a rectas y superficies planas:

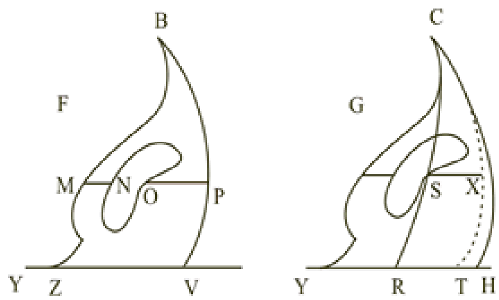


Figura 13: Principio de Cavalieri[4]

Principio de Cavalieri (Versión 1): Sean las figuras $F = BZV$ y $G = CRT$, que tienen iguales alturas con respecto a la regula YH, y tal que las correspondientes cuerdas (o la suma de cuerdas) son iguales, es decir $MN + OP = SX$, entonces $F = G$ (área de BZV igual al área de CRT). Enseguida Cavalieri plantea el resultado cuando las cuerdas están en proporción. Para el caso anterior se plantearía así: tomando $l_1 = MN + OP$ y $l_2 = SX$, si $\frac{l_1}{l_2} = k$, entonces $\frac{F}{G} = K$. Tomado Bobadilla (2012,p.42)

Sin embargo la versión más conocida del principio de Cavalieri es la que relaciona áreas y volúmenes:

Principio de Cavalieri (Versión 2): Si dos volúmenes tienen igual altura, y si secciones hechas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una razón fija, entonces los volúmenes de los sólidos también están en esa misma razón. Tomado Bobadilla (2012,p.43)

Con estos principios Cavalieri logra calcular cuadraturas de figuras planas y volúmenes de sólidos, comparando magnitudes geométricas, puesto que este era el lenguaje que se usaba en este siglo y que se estableció desde los *Elementos* de Euclides. Es por esto que a las áreas y volúmenes no se les asociaba un número, pero como veremos más adelante con la aparición de nuevos estudiosos de las matemáticas se desarrollaría esta concepción.

En el libro II de la *Geometría* según Bobadilla (2012), Cavalieri estableció lo que fueron los primeros desarrollos de la teoría de los indivisibles, en el cual se muestra el denominado método colectivo, con el cual resuelve el problema del cálculo bajo el área de una curva polinómica cuya equivalencia es la integral definida de una función polinómica.

[4] Tomado de Bobadilla (2012)

Cavalieri halla la medida de una región plana acotada a partir de la suma de todas sus líneas. Si cada línea tiene una longitud l, se designa como *omnes linae* l, lo que simbolizamos como $omn.(l)$.

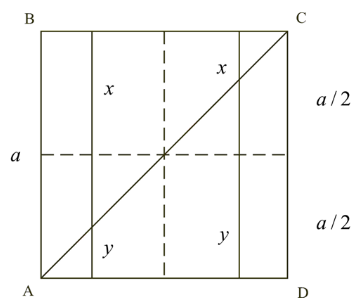


Figura 14: Medida de un cuadrado[5]

En el caso del cuadrado de lado a. $omn.(a) = (cuadrado_a)$. Trazando la diagonal del cuadrado y designando con x la medida de cada una de las líneas paralelas al lado del cuadrado en cualquiera de los triángulos formados por la diagonal, tenemos que $omn.(x) = \frac{(cuadrado_a)}{2}$ de lo que se infiere que el triángulo se considera la mitad del cuadrado. Similarmente si tenemos que $(cuadrado_a)$ representa un cuadrado de lado a, entonces $Omn.(cuadrado_a)_{AB} = (cubo_a)$, es decir a partir del cuadrado de lado a se obtiene el cubo de lado a.

En lo anterior se evidencia que en el libro II, Cavalieri ha establecido que la suma de indivisibles de dimensión n resulta ser una figura geométrica de dimensión $n + 1$.

En 1647 Cavalieri publica *Exercitationes geometricae sex*, esta obra consta de 6 libros de los cuales Bobadilla (2012) afirma:

- En el libro I Cavalieri presenta una versión revisada del método colectivo y sugiere algunas simplificaciones.
- En el libro II exhibe una nueva presentación del método distributivo.
- El libro III consta de una defensa de su método ante la crítica del suizo Paul Guldin en su libro *Centrobarytica*, donde lo acusa de "trastocar la Geometría de los antiguos, en lugar de haberla extendido".
- En el libro IV presenta una generalización del método colectivo lo que le permite trabajar con curvas algebraicas de grado mayor que 2.
- En el libro V utiliza parcialmente el método de los indivisibles para determinar centros de gravedad.

---

[5] Tomado de Bobadilla (2012)

- En el libro VI presenta una miscelánea de temas (p.44).

Y sobre todo hace referencia al libro IV puesto que Cavalieri obtiene que $omn.(x^n) = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ para los casos n = 3, 4, 5, 6 por verificación directa. Para n = 9, asume los resultados de n = 7 y n = 8 y mediante inducción obtiene $omn.(x^9) = \frac{a^{10}}{10}$.

Teniendo en cuenta que la obra *Exercitationes* se publica 10 años después de conocerse la *Geometría* de Descartes, se podría pensar que Cavalieri conocía algunos resultados sobre las curvas geométricas de ecuación x^n y por eso Cavalieri está buscando la cuadratura de estas curvas y con sus resultados quería generalizar el cálculo de cuadraturas.

La introducción de la noción "todas las líneas" (*omnes lineae*) por parte de Cavalieri, le valieron fuertes críticas por parte de otros matemáticos, dado que se fundamentaban en que toda magnitud geométrica es homogénea, es decir que la suma de segmentos es un segmento y la suma de planos es un plano y la idea de Cavalieri contradecía estas teorías; sin embargo según Bobadilla (2012) los términos de Cavalieri fueron o están malinterpretados, puesto que en ningún momento Cavalieri afirma que las figuras están compuestas de "todas las líneas", solo afirma que en ellas pueden trazarse o las podemos encontrar; Cavalieri no parte del punto, el segmento o el plano para llegar mediante una adición a el segmento, el plano y el sólido, por el contrario el parte del sólido, del plano y del segmento, y a través de cortes llegar a los indivisibles. Aunque en la teoría de Cavalieri los indivisibles son parte fundamental, no se evidencia en *Geometría de los Indivisibles* una definición explicita de estos; pese a estos, el concepto de indivisible influenciará a los trabajos de los matemáticos de su época a y futuros matemáticos que buscaban una solución para el problema del cálculo de cuadraturas.

2.3.3 La cuadratura de la Hipérbola de Fermat

Fermat presenta un método para encontrar la cuadratura de la hipérbola $y = \frac{1}{x^2}$ el cual supera el problema de homogeneidad en el que los indivisibles dieron lugar a un objeto de dimensión mayor:

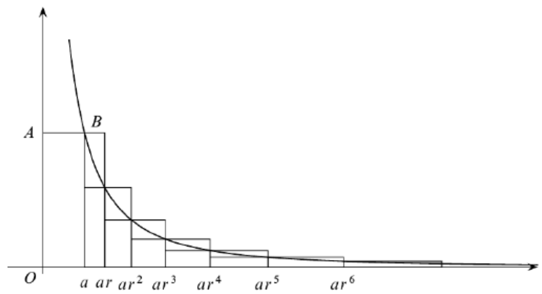


Figura 15: Cuadratura de la Hipérbola por Fermat

Según Moran Pizarro (2014) Fermat hizo uso del siguiente resultado de las progresiones geométricas: "Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes" (p. 37).

y empezó su razonamiento de esta manera:

Sean los puntos de abscisas $a, ar, ar^2, a, \ldots$ con $r > 1$; ahora, sea S la suma de todos los rectángulos sucesivos $R_1, R_2, R_3, \ldots$, inscritos; por tratarse de una progresión geométrica decreciente se tiene que:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1}$$

De donde:

$$S - R_1 = \frac{1}{a} = OA \cdot A$$

y:

> […] si ahora añadimos [a ambos miembros de esta igualdad] el rectángulo que a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada, alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes… No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente, excepto la que ha sido indicada [la hipérbola de Apolonio] Moran Pizarro (2014, p.38).

Retomando los puntos de abscisas $a, ar, ar^2, a, \ldots$ con $r > 1$, entonces el área de los triángulos inscritos está dada por:

$$(ar-a)\frac{1}{(ar)^2}+(ar^2-ar)\frac{1}{(ar^2)^2}+(ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2}+\cdots=\frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r^k}=\frac{1}{ar}$$

Y el área de los triángulos circunscritos está dada por:

$$(ar-a)\frac{1}{a^2}+(ar^2-ar)\frac{1}{(ar)^2}+(ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2}+\cdots=\frac{r-1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r^k}=\frac{r}{a}$$

De tal manera que el área bajo la curva estará acotada por $\frac{1}{ar}$ y por $\frac{r}{a}$ de modo que:

$$\frac{1}{ar}<S<\frac{r}{a}$$

Por lo tanto: $S=\frac{1}{a}$ que coincide con el área del rectángulo $OABa$

A partir de lo anterior, es evidente que en el método de Fermat se encuentran aspectos de la integral definida, a través de la inscripción y circunscripción de elementos infinitamente pequeños.

2.3.4 La aritmética de los infinitesimales de Wallis

John Wallis (1616-1703), continuando con los trabajos realizados por Descartes y Cavalieri, propone un método para hallar la cuadratura de curvas por medio del método de "inducción incompleta" y con este establece una teoría para algunas familias de cuadraturas. Gracias a que Descartes definió el producto entre segmentos como otro segmento y la propiedad clausurativa de esta operación, Wallis establece que el área de un triángulo es $\frac{b \cdot a}{2}$ en la que b representa la base y a la altura.

En Bobadilla (2012) mencionan que Wallis advierte que para el cálculo de cuadraturas, las sumas pueden realizarse aritméticamente y no por medio de razones trigonométricas; es por eso que lo que Cavalieri llama *"omnes linae",* a partir del cero son tratados como series aritméticas o suma de sucesiones las cuales tienen un límite. Esta idea lleva a Wallis a buscar la suma de las series de potencias. Para Wallis era necesario expresar en términos aritméticos la Geometría, como se evidencia en Bobadilla (2012), citando a Stedall, el cual afirma que:

> En su intento de relacionar la Aritmética a la Geometría, Wallis incluso utilizó dos vocabularios distintos pero paralelos: por ejemplo, primera potencia, segunda potencia y tercera potencia en aritmética, y lado, cuadrado y cubo, en Geometría.

> Los verbos latinos *multiplicare* y *dividere* en aritmética, y *ducere y applicare* en Geometría (p.48).

Con la idea de aritmetización de la Geometría, Wallis establece el área de un triángulo y un paralelogramo, pero antes de lograr esto, Wallis establece la proposición 1 de *La Aritmética de los Infinitesimales*, la cual dice que:

> Dada una serie, de cantidades en proporción aritmética (o como la sucesión de números naturales) continuamente creciente, empezando en un punto o en 0 (esto es, cero, o nada), tal como 0, 1, 2, 3, 4, etc., la cual se considera para investigar la razón de la suma de todos ellos, con la suma de igual número de términos iguales al mayor.[6]

Wallis establece que la razón buscada entre las sumas es $\frac{1}{2}$. Para demostrar la proposición 1 Wallis utiliza su método de inducción incompleta y a partir de estudiar seis casos, muestra que $\frac{0+1+2+\cdots+n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$. En la proposición 2 muestra que si en la sucesión el primer término de la sucesión es 0 y el último l, entonces la suma de estos términos será $\frac{l+1}{2}l$, en la que el número de términos es $l+1$. Pero si tomamos *m* como el número de términos, entonces obtenemos $\frac{1}{2}ml$.

Ahora bien, después de demostrada la proposición 1, Bobadilla (2012) citando Stedall (2004) retoma el corolario de Wallis que plantea que: “un triángulo es a un paralelogramo (de igual base e igual altura) como 1 a 2” (p.48) y también que:

> Si en un triángulo con altura *A* y base *B*, se inscriben paralelogramos, cada uno de los cuales tiene altura $\frac{1}{\infty}A$, y el aumento de anchura es $\frac{1}{\infty}B$, la altura inscrita será $\infty \times \frac{1}{\infty}A$ y, y la base no será *B*, pero si $B - \frac{1}{\infty}B$ (Bobadilla, 2012, p.49).

Según Bobadilla (2012) si se realiza una interpretación geométrica de lo que afirma Wallis y valiéndonos de la proposición 2 mencionada anteriormente, el número de términos *m* es el número de rectángulos y *l* seria la altura del último rectángulo de la sucesión, entonces se puede afirmar que $m = \left(\infty \times \frac{1}{\infty}m\right)$, es la altura del triángulo, y $l = l - \frac{1}{\infty}l$, la base y de esta manera que Wallis estaría dando la fórmula del área del triángulo $\frac{m \times l}{2}$.

---

[6] Citado por Bobadilla (2012)

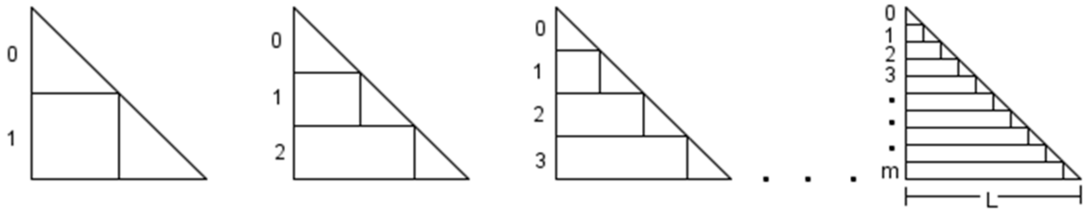


Figura 16: Área del triángulo[7]

Como *"un triángulo es a un paralelogramo (de igual base e igual altura) como 1 a 2",* entonces el área del paralelogramo es $m \times l$, lo cual se pude afirma de la proposición 3 realizada por Wallis.

Es importante resaltar que con Wallis por primera vez en nuestro recorrido, le asignamos un valor numérico a una cuadratura y no nos valemos de las razones para hacerlo; sobre esto Recalde (2011) citado por Bobadilla (2012) plantea que: "esta presentación contempla un salto cualitativo profundo, pues asigna un valor numérico a cada cuadratura, lo que modernamente corresponde la noción de área"(p.50).

En *la Aritmética de los Infinitos*, Wallis está estudiando las razones de sucesiones de la siguiente naturaleza:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k}$$

Como vimos en la proposición 1, cuando $k = 1$ la razón encontrada entre las dos series es $\frac{1}{2}$ para $n > 0$; cuando $k = 2$ realiza cálculos hasta $n = 6$

$$\frac{0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 26 + 36}{36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36} = \frac{91}{252} = \frac{13}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}$$

Y aplicando su método de inducción incompleta concluye que

$$\frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

Dado que n aumenta indefinidamente, la razón entre las dos series es $\frac{1}{3}$, Wallis usa este resultado y muestra que la razón entre el cono y el cilindro o la pirámide y el prisma es como 1 a 3. Continuando con el mismo proceso y variando el valor de k, infiere que la

[7] Tomado de Bobadilla (2012)

razón entre las series es $\frac{1}{k+1}$ llamada razón característica en Montilla Erazo (2014). Según Bobadilla (2012), Wallis desea aritmetizar los indivisibles de Cavalieri pasando a los rectángulos de altura $m\frac{1}{\infty}$, los cuales son líneas cuando el número de rectángulos tiende a infinito. De esta manera usando series en las que el número términos tiende a infinito Wallis obtenía cuadraturas. Wallis adopta el símbolo ∞ para referirse al infinito y haciendo uso de tal concepto es quien está más cerca de la noción de límite y la usa intuitivamente encontrando la razón entre las sumas de sucesiones que tienden al infinito, al respecto Bobadilla (2012) comenta que :

> Vemos en Wallis una ruptura total con el rigor de la Geometría griega y la tradición aristotélica de evitar el infinito. Wallis incorpora el símbolo ∞, para referirse al innombrable de Aristóteles, y mediante su método de inducción incompleta, generaliza los resultados obtenidos para las sumas finitas a las series infinitas (uso intuitivo del paso al límite) (p.48).

Según Montilla Erazo (2014) Wallis asegura que algunas de las razones sobre cuadraturas y volúmenes pueden hallarse a partir de las razones características y como ejemplo para esto, toma el problema de hallar el área bajo la curva $y = x^k$ el cual es un caso particular de la razón característica de la sucesión con índice k, Wallis afirma que esta cuadratura puede hallarse al sumar un número infinito de líneas paralelas, lo cual se asemeja a las ideas de Cavalieri y sus *omnes linae.*

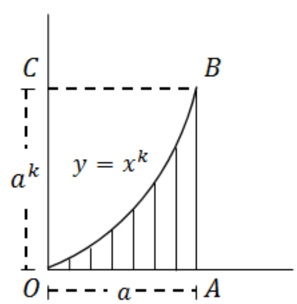


Figura 17: Cuadratura de la curva[8]

A partir de la Figura 17 observemos cómo Wallis procedió para obtener su cuadratura. Lo que debemos hacer es establecer una razón entre la serie que corresponde a las líneas de la figura OAB y la serie correspondiente a las líneas del paralelogramo circunscrito $OABC$, ahora si se divide el segmento $OA = a$ en n partes de longitud $h = \frac{a}{n}$, siendo n infinito, entonces la región OAB estará formada por infinitas líneas paralelas al eje y con altura x^k,

[8] Tomado de Montilla Erazo (2014)

y el paralelogramo $OABC$ estará formado por infinitas líneas de altura constante a^k. Si establecemos la razón de estas cuadraturas obtendremos:

$$\frac{Cuad.OAB}{Cuad.OABC} = \frac{\left(\frac{0a}{n}\right)^k + \left(\frac{1a}{n}\right)^k + \cdots + \left(\frac{na}{n}\right)^k}{a^k + a^k + \cdots + a^k} = \frac{\sum_{i=0}^{n} i^k}{\sum_{i=0}^{n} n^k}$$

Donde $Cuad.OAB$ y $Cuad.OABC$ hacen referencias a las cuadraturas de las regiones OAB y el paralelogramo $OABC$ respectivamente.

Dado que n tiende a infinito, entonces obtenemos una razón característica y podemos inferir que:

$$\frac{Cuad.OAB}{Cuad.OABC} = \frac{\sum_{i=0}^{n} i^k}{\sum_{i=0}^{n} n^k} = \frac{1}{k+1}$$

Como el área del paralelogramo $OABC$ inscrito tiene área a^{k+1}, entonces podemos afirmar que:

$$\frac{Cuad.OAB}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

Lo que puede escribirse como:

$$Cuad.OAB = Cuad.[x^k]_0^a = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Este resultado ya era conocido por el trabajo de Cavalieri en el libro IV de *Exercitationes geometricae sex*, en el cual obtuvo que $omn.(x^n) = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ para algunos valores de n, sin embargo resultaba importante llegar a la misma conclusión a partir de la aritmetización de los indivisibles de Wallis, su método de inducción incompleta y sus razones características. Según Montilla Erazo (2014) el mérito de Wallis fue extender su resultado para exponentes racionales al observar que para las curvas del tipo $y = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = x^{\frac{p}{q}}$, siguiendo un proceso análogo al usado para determinar la cuadratura bajo la curva $y = x^k$, se obtiene que la cuadratura de la región acotada por la curva $y = x^{\frac{p}{q}}$, el eje x y la recta $x = 1$ está dada por

$$Cuad.\left[x^{\frac{p}{q}}\right]_0^1 = \frac{q}{p+q}$$

No conforme con esto Wallis generaliza para el caso de exponentes no racionales, pero sin dar una argumentación lo bastante sólida. Según Bobadilla (2012) y Montilla Erazo (2014), con Wallis se transforma el problema del cálculo de cuadraturas en el problema de hallar el área bajo la curva.

2.3.5 El resultado fundamental de Barrow

Según (Suárez, 2008), fue el conservador apego de Barrow a los métodos geométricos el que le impidió a este terminar de revelar y de hacer uso de la relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas; relación que es presentada en la Lección X, Proposición 11 de las *Lectiones Goemetricae,* como:

> Dadas las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. El segmento AD representa el eje de abscisas donde toma valores x. La cantidad $g(x)$ representa el valor del área bajo la gráfica de f comprendida entre el punto A y x. Dado un punto de abscisa D, se trata de probar que la pendiente de la tangente a $y = g(x)$ en el punto F, es decir en el punto $(d, g(D))$, es igual a $f(D) = DE$ (Suárez, 2008 p.31).

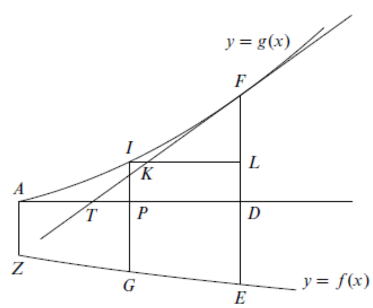


Figura 18: Demostración del Teorema de Barrow

Para la cual Barrow propone la siguiente demostración[9]:

En la Figura 18, Se determina la línea recta FT por F que interseca en T a la recta AD y tal que:

$$\frac{DF}{DT} = f(D) = DE$$

Ahora se necesita probar que FT es la tangente a $y = g(x)$ en el punto F. Para lo cual se establece que la distancia horizontal KL, de cualquier punto L de la recta EF a la recta FT es menor que la distancia IL, de dicho punto L a la curva $y = g(x)$.

[9] Demostración tomada de (Suárez, 2008)

Como:

$$\frac{FL}{KL} = \frac{DF}{TD} = DE$$

y:

área $ADEZ = FD$; área $APGZ = PI = LD,$ área $PDEG = FD - LD = FL$

ya que el área $PDEG < rectángulo\ PDEG'$entonces

$$KL < PDEG' \Longrightarrow DE > \frac{FL}{PD}$$

Por lo que

$$\frac{FL}{KL} > \frac{FL}{PD} \Longrightarrow KL < PD = IL$$

Se deduce que el unto K se ubica debajo de la curva $y = g(x)$ y por tanto al lado de la curva.

Para terminar la demostración, se hace necesario tomar puntos a la derecha de EF y repetir el razonamiento; probando así que TF es tangente a $y = g(x)$ en D y su pendiente es $DE = f(D)$. Prueba que en términos actuales es equivalente a:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

2.4 LA INTEGRAL COMO EL CÁLCULO DE ANTIDERIVADAS

Para el siglo XVII gracias a los avances realizados por algunos precursores del cálculo de cuadraturas (como Kepler y su idea de los infinitesimales, Cavalieri con su método de los indivisibles y Wallis con su aritmetización de los infinitesimales, en las que nos muestra como transitar entre dos ideas tan potentes como los indivisibles y los infinitesimales), se tenían una serie de métodos para encontrar la cuadratura de curvas, estos métodos e ideas fueron de gran innovación y revolucionarias para su época, en los que se destacaba la aritmetización de la Geometría y el primer tratamiento sobre el concepto de límite, esto con el fin de generalizar las cuadraturas de las curvas; sin embargo estos métodos solo servían para algunos casos concretos. Es por eso que personajes como Newton y Leibniz estarán destinados a retomar las ideas y métodos de sus antecesores y crear uno en el cual, a partir de términos geométricos y no algebraicos, se pudiera calcular la cuadratura de cualquier curva.

2.4.1 Newton

Isaac Newton (1642-1727), parte principalmente de los estudios de Wallis sobre cuadraturas y es por esto que Newton reconoce los aportes de este a su nuevo método:

Por la regla 59 del *Arithmetica infinitorum* publicada por el señor Wallis en 1655, si ponemos x para la abcisa de una curva y m y n son números, y $x^{m/n}$ la ordenada erigida en ángulo recto, entonces el área de la figura será $\frac{n}{m+n}x^{\frac{n}{m+n}}$.[10]

En su *De analysi* Newton empieza dando unas reglas para calcular cuadraturas y la regla 1 dice:

Si $ax^{\frac{m}{n}} = \mathrm{y}$, será $\frac{an}{n+m}x^{\frac{n}{m+n}} =$ área ABD

En otras palabras esta regla afirma que si la ecuación de una curva es de la forma $y = ax^{\frac{m}{n}}$ entonces la expresión $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ corresponde a su cuadratura. Aunque este resultado ya había sido enunciado por Wallis, de acuerdo con Bobadilla (2012), los procesos que usó para demostrarlo son novedosos en los que se resalta el tratamiento para las cantidades infinitesimales. Observemos un caso particular descrito por Newton sobre esta regla, en la que hallaremos la expresión algebraica de una curva, cuya cuadratura está dada[11]:

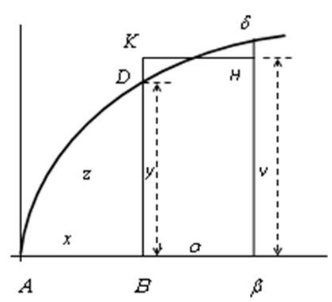


Figura 19: Cuadratura de la curva $AD\delta$[12]

[10] Citado por Bobadilla (2012)
[11] Descripción basada en Bobadilla (2012, p.56)
[12] Tomado de Bobadilla (2012)

De la Figura 19 tenemos que $AB = x, BD = y$, el área $ADB = z, B\beta = o$, $BK = v$ y el área del rectángulo $B\beta HK(ov)$ igual al área de la figura $B\beta\delta D$.

De las anteriores igualdades podemos afirmar que $A\beta = x + o$ y $A\delta\beta = z + ov$. Si asumimos que $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ó $z = \frac{2}{1+2}x^{\frac{1+2}{2}}$, debemos demostrar que $y = x^{\frac{1}{2}}$. Partamos de la igualdad $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ y elevando al cuadrado se tiene $\frac{4}{9}x^3 = z^2$

Sustituyendo en esta igualdad a $x + o\ por\ x$ y $z + ov\ por\ z$ obtenemos

$$\frac{4}{9}(x + o)^3 = (z + ov)^2$$

Resolviendo las potencias de los binomios resulta

$$\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}3x^2\mathrm{o} + \frac{4}{9}3xo^2 + \frac{4}{9}o^3 = z^2 + 2zov + o^2v^2$$

Dado que $\frac{4}{9}x^3 = z^2$ se tiene que

$$\frac{4}{9}3x^2\mathrm{o} + \frac{4}{9}3xo^2 + \frac{4}{9}o^3 = 2zov + o^2v^2$$

Dividiendo a ambos lados de la igualdad por *o* obtenemos

$$\frac{4}{9}3x^2 + \frac{4}{9}3xo + \frac{4}{9}o^2 = 2zv + ov^2$$

Si hacemos que la distancia entre β y B sea infinitamente pequeña de tal manera que ν e *y* coincidan, entonces los términos que son multiplicados por *o* desaparecen, tenemos que

$$\frac{4}{9}3x^2 = 2zv \text{ Ó } \frac{4}{9}3x^2 = 2zy$$

Sustituyendo el valor de *z* se tiene

$$\frac{4}{9}3x^2 = 2\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)y$$

Y finalmente despejando *y* obtenemos

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

Hemos demostrado para un caso particular que si conocemos la cuadratura de cierta curva, podemos encontrar la ordenada de esta curva; en lenguaje actual podemos decir que la derivada de la función área $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ es $y = x^{\frac{1}{2}}$

Ahora en general si la expresión $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ corresponde a la cuadratura de cierta curva, entonces $y = ax^{\frac{m}{n}}$ corresponde a la expresión de esta curva[13].

Partamos de la igualdad $z = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ y realizando los siguientes remplazos $\frac{na}{m+n} = c$ y $m + n = p$ obtenemos

$$cx^{\frac{p}{n}} = z$$

Y elevando a la potencia *n* resulta

$$c^n x^p = z^n$$

Si sustituimos *x* por $x + o$ y *z* por $z + ov$ ($z + oy$) obtenemos

$$c^n(x + o)^p = (z + ov)^n$$

Resolviendo las potencias obtenemos

$$c^n(x^p + px^{p-1}o + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}x^{p-2}o^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3}x^{p-2}o^3 \dots) = z^n + nz^{n-1}ov + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^{n-2}o^2v^2 + \cdots$$

Dado que $c^n x^p = z^n$ entonces podemos inferir que

$$c^n\left(px^{p-1}o + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}x^{p-2}o^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3}x^{p-2}o^3 \dots\right) = nz^{n-1}ov + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^{n-2}o^2v^2 + \cdots$$

Dividiendo a ambos lados de la igualdad por *o* obtenemos

[13] Descripción basada en Bobadilla (2012, p.56)

$$c^n\left(px^{p-1}+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^{p-2}o+\frac{p(p-1)(p-2)}{2\cdot 3}x^{p-2}o^2\ldots\right)$$
$$=nz^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^{n-2}ov^2+\cdots$$

Ahora quitando los términos que se desvanecerán se tiene

$$c^n px^{p-1}=nz^{n-1}y$$

Lo que es equivalente a

$$c^n px^{p-1}=\frac{nz^n y}{z}$$

Sustituyendo z obtenemos

$$c^n px^{p-1}=\frac{n\left(cx^{\frac{p}{n}}\right)^n y}{cx^{\frac{p}{n}}}$$

Operando se tiene

$$c^n px^{p-1}=\frac{nc^n x^p y}{cx^{\frac{p}{n}}}$$

Dividiendo a ambos lados por $c^n x^p$ obtenemos

$$px^{-1}=\frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$$

Despejando ny se obtiene

$$pcx^{\frac{p-n}{n}}=ny$$

Sustituyendo $\frac{na}{m+n}=c$ y $m+n=p$ y dividiendo por n a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$ax^{\frac{m}{n}}=y \text{ ó } y=ax^{\frac{m}{n}}$$

En esta demostración se resalta la introducción del elemento "*o*" el cual representa la distancia entre β y B la cual resulta ser un infinitesimal, es decir una cantidad muy pequeña pero diferente de cero. Con el procedimiento anterior Newton establece la operación inversa de la cuadratura y elabora una serie de tablas de cuadraturas y anticuadraturas. Aunque los métodos de Newton no eran totalmente aceptados, la regla 1 se volverá uno de los aportes más significantes al Cálculo y en ella se establece la relación inversa fundamental entre el cálculo de tangentes y el cálculo de áreas.

Newton extiende sus estudios sobre los binomios para los casos en que los exponentes son racionales, e intentando hallar la cuadratura del círculo $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ a partir de las cuadraturas de curvas análogas que ya eran conocidas; a saber:

La cuadratura de $y = (1 - x^2)^0$ es x.

La cuadratura de $y = (1 - x^2)^{\frac{2}{2}}$ es $x - \frac{1}{3}x^3$.

La cuadratura de $y = (1 - x^2)^{\frac{4}{2}}$ es $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$.

La cuadratura de $y = (1 - x^2)^{\frac{6}{2}}$ es $x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$

La cuadratura de $y = (1 - x^2)^{\frac{8}{2}}$ es $x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$

Newton, observando estas curvas y sus cuadraturas, identificó una regularidad en ellas; por ejemplo el primer término siempre es x, el denominador de cada término es igual al exponente de la variable, los cuales son siempre impares apareciendo secuencialmente y el numerador de cada término coincide con la secuencia de los términos del triángulo de Pascal. Siguiendo estas regularidades si el exponente es $\frac{1}{2}$, entonces la cuadratura del círculo $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ es

$$x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{8}}{5}x^5 - \frac{\frac{1}{16}}{7}x^7 - \frac{\frac{5}{128}}{9}x^9 - \cdots$$

Invirtiendo el proceso se concluye que la expansión binomial de $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ es:

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \cdots$$

Según Bobadilla (2012) y Montilla Erazo (2014) En sus *Principia Mathematica*, Newton representa el área bajo la curva como el espacio recorrido por un móvil, el cual se desplaza a una velocidad constante *k* en un tiempo *t;* a medida que cambia el tiempo se está recorriendo cierta superficie por lo que el área $A = Kt$, pero también el área bajo una curva se puede generar a partir del movimiento continuo de una recta de longitud k:

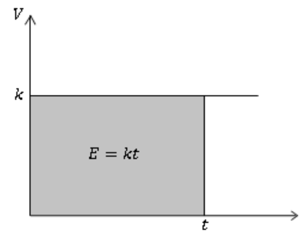


Figura 20: Área desde la perspectiva de Newton[14]

Si transcurre un tiempo muy pequeño o mejor un infinitesimal de tiempo, (que en una notación moderna se representaría como dt), la ordenada se desplaza también una distancia infinitesimal, por lo que también se generara un incremento infinitesimal del área denotado como dA obtenido de la siguiente manera $dA = dt \cdot k$; esto implica que la variación del área es directamente proporcional con la variación del tiempo. La velocidad con la cual varia el área está dada por el siguiente cociente "razón de cambio" $\frac{dA}{dt}$.

Enseguida Newton analiza el caso en el cual un móvil se desplaza con velocidad uniformemente acelerada $A = \frac{1}{2}at^2$, entonces $dA = at \cdot dt$, lo que se puede interpretar mediante un modelo físico-geométrico:

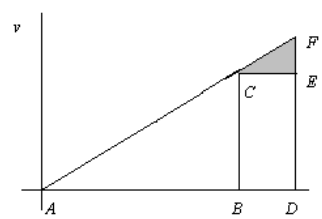


Figura 21: Variación del área de un movimiento uniformemente acelerado[15]

Si el triángulo *ABC* de la

Figura 21, se genera a partir del desplazamiento uniforme de BC, entonces si la base AB fluye uniformemente, esta va adquirir un aumento representado por $BD = dt$ y en general el triángulo *ABC* adquiere un incremento $BDEFC$; de este incremento el triángulo EFC se determina por la aceleración del movimiento, no del movimiento de BC el cual fluye

[14] Tomado de Bobadilla (2012)
[15] Tomado de Bobadilla (2012)

uniformemente. Si BD es infinitamente pequeño, entonces el aumento de la velocidad EF también lo es y por lo tanto la variación instantánea del triángulo ABC está determinada por el rectángulo $BDEC$.

Newton afirmaba que las cantidades matemáticas no están constituidas por partes infinitamente pequeñas si no que eran generadas a partir del movimiento continuo. Las fluentes son las cantidades que son generadas por movimientos y que fluyen continuamente en el tiempo, por otra parte a las razones de cambio o velocidades de estas fluentes se les dio el nombre de fluxiones y a partir del tratamiento geométrico de estas cantidades Newton advierte la relación inversa entre cuadratura y tangente.

Ahora observemos como Newton muestra la relación inversa entre el cálculo de cuadraturas y el trazado de tangentes en la introducción de *la Cuadratura de las curvas* citado por Bobadilla (2012, p.59):

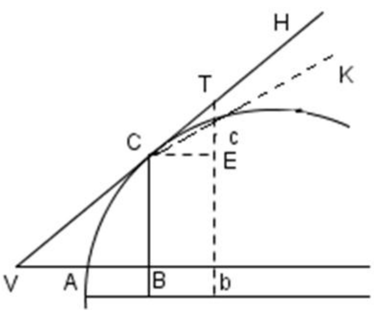


Figura 22: Relación entre el cálculo de cuadraturas y tangentes[16]

En la

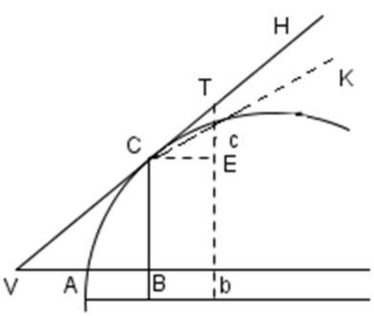


Figura 22, Si desplazamos la ordenada BC hasta un nuevo punto bc, obtenemos un paralelogramo $BbEC$; la recta VH es tangente a la curva en el punto C. El incremento de la abscisa AB es Bb y el incremento de la ordenada BC es Ec. Cuando estos incrementos se dan en un tiempo muy pequeño, los lados del triángulo CET están en razón con los

[16] Tomado de Bobadilla (2012)

incrementos que se han dado, igual que las fluxiones de AB y BC por lo que pueden ser representados por estos lados o por los lados del triángulo VBC el cual es semejante al triángulo CET.

Trazando una recta k uniendo los puntos C y c, y retrocediendo la ordenada bc hasta BC, cuando los puntos c y C coincidan entonces la secante CK coincide con la tangente VH; se puede decir que la tangente en un punto se pude considerar como la última razón de la secante. Al respecto Waldeg citado por Bobadilla (2012) afirma:

> Mediante estos argumentos, se puede visualizar fácilmente que la derivación y la integración son proceso inversos: al avanzar la ordenada BC con un movimiento continuo, generamos el área *ABC* (integración). Cuando retrocedemos la ordenada BC hasta su posición original, generamos la tangente en C (derivación). Este razonamiento nos permite ver el significado geométrico del Teorema Fundamental (p.62).

Para Newton el área de una región es una variable y por lo tanto se puede hablar de su fluxión (razón de cambio o velocidad con que cambia) y operar con ella. Para Newton, las curvas eran generadas por el movimiento de un punto arbitrario, lo que ocasiona que las coordenadas x e y y la cuadratura z fluyeran con respecto al tiempo. Newton representa a las fluxiones con un punto superior de las fluentes, por ejemplo si x, y, z representan fluentes entonces $\dot{x}\dot{y}, \dot{z}$ son sus fluxiones respectivamente. A Newton no le interesaban el comportamiento individual de las fluxiones; él estudiaba las razones de las fluxiones $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ la cual corresponde a la pendiente de la recta tangente; por lo tanto, dadas las fluxiones, encontrar las fluentes es equivalente a encontrar la cuadratura de la curva.

> Proposición II. Sea ABC una figura con que se ha de dar, BC la ordenada, aplicada en ángulo recto, y AB, la abcisa. Prolónguese CB hasta E y sea BE $= 1$, y complétese el paralelogramo $ABED$: las fluxiones de las áreas $ABC, ABED$ serán como $BC\ y\ BE$. Asúmase por tanto una ecuación cualquiera que defina la relación de las áreas, y de ahí dará la relación de las ordenadas BC y BE, por la Prop. I Q.E.I. tomado de Bobadilla (2012, p. 63).

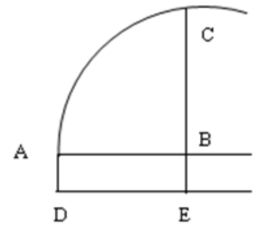


Figura 23: Fluxiones y fluentes[17]

Relacionando la proposición anterior y la **Figura 23**, $AB = x$, $BC = y$, el área de la región $ABC = S$, el área del paralelogramo $ABED = x \cdot 1$ y las variaciones de estas áreas son ds y dx respectivamente, según la proposición, tenemos que $\frac{dS}{dx} = \frac{BE}{1}$ que es igual a $\frac{dS}{dx} = y$, entonces si conocemos la fluxión $\frac{\dot{s}}{\dot{x}} = y$, encontrar la fluente S es equivalente a encontrar el área bajo la curva determinada por la ordenada y.

Como ya habíamos mencionado para Newton las curvas son generadas a partir del movimiento de un punto arbitrario, es por eso que para el estudio de las cuadraturas de las curvas se involucra una idea de cinemática, la cual le permitía a Newton usar incrementos infinitamente pequeños sin ninguna inconveniente, pues él pensaba que las nociones físicas estaban lo bastante justificadas; al usar cantidades evanescentes convenientemente las críticas no se hicieron esperar, sin embargo Newton desarrolló procesos algorítmicos en los que involucro cantidades evanescentes con resultados satisfactorios.

2.4.2 Leibniz

Según Montilla Erazo (2014), para Gottfried Von Leibniz (1646-1716) la curva está formada por segmentos de longitud infinitesimal y el área bajo esta, es una suma infinita de magnitudes infinitamente pequeñas; estas magnitudes para Bobadilla (2012), son una sucesión de ordenadas equidistantes, en la cual cuando la distancia entre las ordenadas es infinitamente pequeña, se obtiene una aproximación de la cuadratura lo suficientemente exacta y la diferencia entre las ordenadas sucesivas seria la pendiente de la tangente.

Leibniz realizó estudios sobre sucesiones numéricas y las sucesiones de sus diferencias numéricas consecutivas; estos estudios sin duda fueron fundamentales para el desarrollo de sus trabajos posteriores sobre el Cálculo.

Leibniz se da cuenta que dada una sucesión $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y la sucesión de sus diferencias $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ definidas como $d_1 = a_1 - a_0, d_2 = a_2 - a_1, \dots, d_n = a_n -$

[17] Tomado de Bobadilla (2012)

a_{n-1}, si sumamos las diferencias $a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2, \ldots, a_n - a_{n-1}$ se obtiene $a_n - a_0$; en la actualidad esta serie se conoce como telescópica. De estos estudios surge la idea de que existe una relación inversa entre la operación de tomar diferencias y la de realizar sumas de los elementos de una sucesión. Leibniz lleva esta idea al campo geométrico y le permite observar la relación que existe entre el cálculo de cuadraturas y el de tangentes:

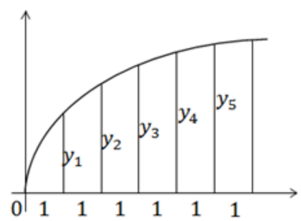


Figura 24: Cuadraturas de Leibniz

En la Figura 24 se tiene una sucesión de ordenadas que definen una curva y cuya distancia entre ellas es la unidad, entonces al sumar esta sucesión se obtiene una aproximación de la cuadratura de dicha curva, mientras que la diferencia entre dos ordenadas consecutivas nos aproxima a la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva; sin embargo, si la diferencia entre las ordenadas es un infinitesimal, entonces la aproximación seria exacta. Similarmente como encuentra la relación entre las operaciones de las sucesiones numéricas, Leibniz concluye que el cálculo de las cuadraturas y de tangentes son operaciones inversas.

Según Montilla Erazo (2014) y Bobadilla (2012), Leibniz estudia el método del "triángulo característico" para determinar cuadraturas de curvas más generales y el cual ya había utilizado Pascal para estudiar la cuadratura del círculo y para demostrar la proposición I del tratado de senos de un cuadrante de círculo: La suma de los senos (ordenadas) de un arco de un cuadrante (de un círculo) es igual a la porción de la base entre el seno extremo multiplicado por el radio.[18]

Según (Suárez, 2008), los términos "abscisa" "ordenada" y "coordenada" los cuales son muy utilizados en la Geometría analítica, nunca fueron usados por Descartes; por el contrario son propios de Leibniz y mientras que en la actualidad se habla de "diferenciales" él hablaba de "diferencias".

---

[18] Citado por Bobadilla (2012, p. 65).

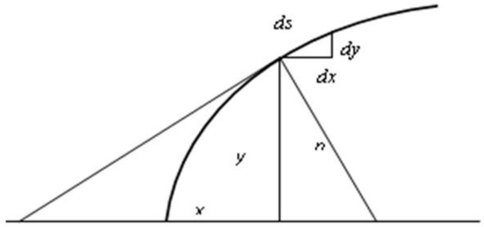


Figura 25: Triangulo Característico[19]

El triángulo característico o diferencial tiene lados infinitesimales ds, dy, dx y cumple con la siguiente relación $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, el lado ds sobre la curva coincide con la recta tangente a la curva en el punto (x, y), la pendiente de esta tangente está dada por $\frac{dx}{dy}$ el cual es un cociente de diferenciales el cual fue llamado por Leibniz "cociente diferencial". Por la semejanza de triángulos en la **Figura 25**, tenemos que $\frac{ds}{n} = \frac{dx}{y}$ por lo tanto $yds = ndx$ lo cual nos lleva a que $\sum yds = \sum ndx$ o $\int yds = \int ndx$, lo que según Bobadilla (2012) es enunciado por Leibniz como "el momento de la curva dada alrededor del eje x es igual al área bajo la segunda curva cuya ordenada es la normal n a la curva dada" (p. 66).

De la **Figura 25** se obtiene por triángulos semejantes que $\frac{dy}{v} = \frac{dx}{y}$ en la cual v es la subnormal a la curva dada, por lo que tenemos $ydy = vdx$ lo cual nos lleva a que $\sum ydy = \sum vdx$ o $\int ydy = \int vdx$; Leibniz afirma que si la curva pasa por el origen hasta la coordenada $(0, b)$, entonces obtenemos el área del triángulo cuya base y altura son iguales a b

> "líneas rectas que continuamente se incrementan desde cero, cuando cada una se multiplica por su elemento de incremento, forman un triángulo".[20]

Gracias al triángulo característico, Leibniz logra relacionar los problemas que Bobadilla (2012) enuncia como "rectificación y cuadratura de curvas"; así la rectificación de una curva se simplifica al problema de calcular el área de la región comprendida entre el eje y y una segunda curva en la que su abscisa es la tangente a la curva dada.

[19] Tomado de Bobadilla (2012)
[20] Tomado de Bobadilla (2012, p.66)

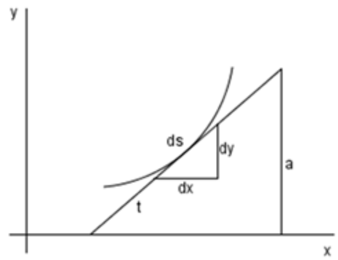


Figura 26: Rectificación y Cuadratura[21]

De la **Figura 26** se obtiene que $\frac{ds}{t} = \frac{dy}{a}$, por lo que $ads = tdy$, de donde $\sum ads = \sum tdy$ o $\int ads = \int tdy$. Estos resultados son resumidos por Leibniz y retomados por Bobadilla (2012) como:

> Así, para encontrar el área de una figura dada, se busca otra figura tal que sus subnormales sean respectivamente iguales a las ordenadas de la figura dada, y entonces esta segunda figura es la cuadratiz de la dada; y así, de esta extremadamente elegante consideración, obtenemos la reducción de las áreas de superficies descritas por rotación a cuadraturas planas, así como la rectificación de curvas; al mismo tiempo, podemos reducir estas cuadraturas de figuras a un problema inverso de tangentes (p.67).

Leibniz logro implementar el método de integración por sustitución; por ejemplo, de la siguiente igualdad $\int vdx = \int ydy$ en la que $v = y\left(\frac{dy}{dx}\right)$, si se sustituye a v, se obtiene que $\int y\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \int ydy$.

El triángulo característico tiene un papel destacado en uno de los resultados más importantes obtenidos por Leibniz: el método de "transmutación", con el que es posible obtener todos los resultados sobre cuadraturas conocidos hasta entonces y el cual usa otra extensión de los indivisibles de Cavalieri. El método es el siguiente, si tenemos dos regiones planas A y B y existe una correspondencia uno a uno entre los indivisibles de la región A y los de la región B, es decir que los indivisibles correspondientes tengan igual área, entonces la región B se deriva de la región A por "transmutación" y se concluye que las dos regiones tienen áreas iguales; para el caso de figuras en el espacio, el método es análogo.

> Mediante el uso del triángulo característico, [Leibniz] nos da una transformación de la cuadratura de una curva en la cuadratura de otra curva que está relacionada con la primera por medio de un proceso de trazado de tangentes. Esta transformación puede

[21] Tomado de Bobadilla (2012)

> ser útil en todos aquellos casos en que ya se conoce la cuadratura de la curva nueva, o bien está en una relación conocida con la cuadratura original.[22]

Ahora observemos cómo funciona el método de "transmutación" que presentamos con base en lo planteado por Montilla Erazo (2014): Considerando la curva $y = f(x)$ y el triángulo característico en el punto P cuya coordenada es (x, y)

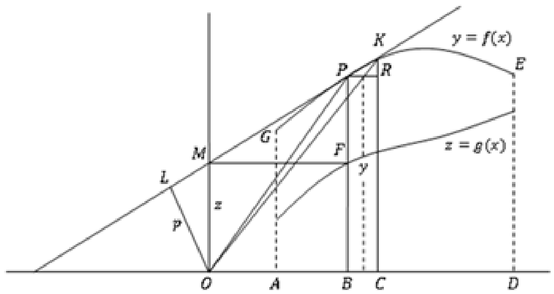


Figura 27: Método de Transmutación[23]

Recordemos que el triángulo característico PKR es un triángulo infinitesimal cuyas medidas de los lados son $ds, dx\ y\ dy$. Determinamos el segmento OL cuya longitud es $OL = p$ perpendicular a la recta LK, la cual es tangente a la curva $y = f(x)$ por el punto P, ahoradeterminamos el segmento PB perpendicular al eje x y en él ubicamos el punto F de tal manera que $MO = FB = z$; por lo tanto $FP = y - z$. Dado que los triángulos PKR, MPF y OML son semejantes, se obtiene que:

$$\frac{p}{z} = \frac{dx}{ds} \text{ Por tanto } pds = zdx$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{y-z}{dy} \text{ Por lo que } z = y - x\frac{dy}{dx}$$

Por lo anterior, se ha determinado para todo punto P de la curva $y = f(x)$ un punto F cuya coordenada es (x, z) y es por esto que obtenemos una nueva curva $z = g(x)$, la cual es de gran utilidad cuando conocemos su cuadratura, puesto que a partir de la cuadratura de esta podemos encontrar la cuadratura de la curva $y = f(x)$.

En la **Figura 27**, se pude observar la cuadratura del triángulo infinitesimal OPK:

---

[22] Citado por Montilla Erazo (2014, p.64)

[23] Tomado de Montilla Erazo (2014)

$$cuadratura\ (\Delta OPK) = \frac{p \cdot ds}{2}$$

Y por la igualdad $pds = zdx$:

$$Cuadratura\ (\Delta OPK) = \frac{z \cdot dx}{2}$$

Dado que la cuadratura de la región $OGPE$ es equivalente a la suma de todos estos triángulos infinitesimales, entonces:

$$cuadratura(región\ OGPE) = \frac{1}{2}\int_a^b zdx$$

En la que $a = OA$, $b = OD$ y $z = g(x)$. La cuadratura de la región $AGPED$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$cuad(región\ AGPED) = cuad(\triangle ODE) + cuad(región\ OGPE) - cuad(\triangle OAG)$$

Lo cual es equivalente a

$$\int_a^b ydx = \frac{b \cdot f(b)}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b zdx - \frac{a \cdot f(a)}{2}$$

Factorizando obtenemos

$$\int_a^b ydx = \frac{1}{2}\left[b \cdot f(b) - a \cdot f(a) + \int_a^b zdx\right]$$

Y finalmente obtenemos:

$$2\int_a^b ydx = [xy]_a^b + \int_a^b zdx$$

Esta fórmula es conocida como el "teorema de transmutación" de Leibniz, en el cual se puede percibir el Teorema fundamental del cálculo.

Leibniz utiliza este resultado y con el determina la cuadratura del círculo unitario [24] el cual tiene centro en $(1,0)$ y cuya ecuación es $y = \sqrt{2x - x^2}$.

---

[24] Descripción basada en Montilla Erazo (2014, p.66)

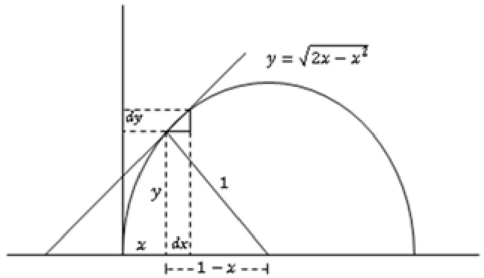


Figura 28: Cuadratura del Círculo[25]

De la figura anterior se pude inferir las siguientes igualdades:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

Utilizando la ecuación $z = y - x\frac{dy}{dx}$ se obtiene que

$$z = y - x\frac{1 - x}{y} = y - \frac{x - x^2}{y}$$

Realizando la resta obtenemos

$$z = \frac{y^2 - x + x^2}{y}$$

Sustituyendo a y obtenemos

$$z = \frac{2x - x^2 - x + x^2}{\sqrt{2x - x^2}}$$

Operando:

$$z = \frac{x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

Factorizando:

[25] Tomado de Montilla Erazo (2014)

$$z = \frac{x}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}$$

Y finalmente la expresión que es equivalente a

$$z = g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

De lo anterior se puede inferir que

$$x = h(z) = \frac{2z^2}{1+z^2}$$

Por lo anterior, se ha obtenido una curva $z = g(x)$ la cual ayudará a calcular la cuadratura de la región limitada por el eje x la recta $x = 1$ y la curva $y = \sqrt{2x - x^2}$, esta región es equivalente a la cuadratura de un cuarto de circunferencia determinado por la ecuación $y^2 = 2x - x^2$; es decir que como el radio de esta circunferencia es 1, un cuarto de cuadratura de esta debe ser igual a $\frac{\pi}{4}$.

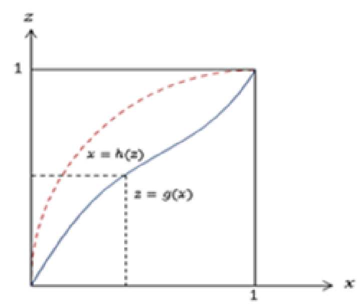


Figura 29: Función $z = g(x)$ y $x = h(z)$[26]

Utilizando el teorema de transmutación obtenemos:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 y dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{2x - x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 z dx$$

De la Figura 29 se puede inferir que $\int_0^1 z dx$ es igual a $1 - \int_0^1 x dz$, sustituyendo este resultado en la ecuación anterior obtenemos

[26] Tomado de Montilla Erazo (2014)

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{2x-x^2}\right]_0^1+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^1\frac{2z^2}{1+z^2}\right)$$

Evaluando los límites se tiene que

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^1\frac{2z^2}{1+z^2}\right)$$

Expresión equivalente a

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-2\int_0^1\frac{z^2}{1+z^2}\right)$$

Operando:

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=1-\int_0^1\frac{z^2}{1+z^2}$$

La expresión $\frac{1}{1+z^2}$ es equivalente a la serie geométrica $1-z^2+z^4-z^6+\cdots$ por tanto

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=1-\int_0^1 z^2(1-z^2+z^4-z^6+\cdots)$$

Multiplicando obtenemos

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=1-\int_0^1 z^2-z^4+z^6-z^8+\cdots$$

Integrando término a término tenemos

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=1-\left[\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}-\frac{z^9}{9}+\cdots\right]_0^1$$

Evaluando:

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots\right)$$

Y finalmente obteniendo que

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 ydx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Según Bobadilla (2012), parece que Leibniz no quedó lo suficientemente satisfecho con este resultado, puesto que es necesario más de cien mil términos de la serie $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$ para obtener una mejor aproximación de π, que la conseguida por Arquímedes; pero a pesar de esto el método de "transmutación" le da un lugar muy importante como uno de los creadores del Cálculo.

Anteriormente hemos recurrido a cierta simbología para designar algunas operaciones como sumas y diferencias, simbología comúnmente utilizada en el quehacer propio de las matemáticas; por ejemplo, símbolos como "d" y "∫" , los cuales representan las operaciones de diferenciación y sumación, son otro gran aporte de Leibniz al Cálculo, puesto que gracias a la asignación de los símbolos a los conceptos que hoy conocemos como integración y derivación, estos empiezan a ser formalizados en el naciente Cálculo. En 1675, Leibniz a partir de la simbología de Cavalieri como *omnes linae* o $omn(l)$, con el fin de obtener cuadraturas en términos más generales, en las que a partir de las diferencias infinitesimales entre ordenadas sucesivas, utilizaba el símbolo $omn(l)$ para representar la suma de estas diferencias y con las que generaban una región o área; al respecto Bobadilla (2012) retoma un planteamiento de Leibniz acerca del uso de tal símbolo: "Sería conveniente escribir "$\int$ " en lugar de "omn" de tal manera que $\int$ l represente omn(l), es decir la suma de todas las l" (p.76).

El símbolo $\int$ esta dado por la primera letra de la palabra suma y el símbolo d esta dado por la primera letra de la palabra diferenciación.

Así como se menciona en Bobadilla (2012), es importante resaltar que Newton y Leibniz nunca definieron el termino integración en sus trabajos, los dos estaban interesados más que en realizar definiciones, buscar procesos para hallar cuadraturas y generalizar este proceso para una mayor cantidad de curvas, la integral en los trabajos de Newton y Leibniz aparece o surge como una herramienta que da solución a un problema y no como un concepto formalizado. Mediante diferentes métodos Newton y Leibniz lograron una solución para el cálculo de cuadraturas, problema que ya había sido estudiado por grandes matemáticos como Cavalieri, Wallis, Descartes etc. y que sentaron las bases con conceptos y procesos para que estos dos personajes de forma independiente crearan un Cálculo, que aunque era criticado por no estar dotado de total rigor, si lo estaba de bastante ingenio y sobretodo solucionaba muchos de los problemas que habían planteado sus antecesores.

2.5 LA INTEGRAL COMO OBJETO DE ESTUDIO MATEMÁTICO

2.5.1 Los inicios de un nuevo concepto de integral

Según Moran Pizarro (2014), en el siglo XVII y gracias a problemas como el de la curva Isócrona aparecen ecuaciones como las siguientes:

$$dy\sqrt{b^2y - a^3}=dx\sqrt{a^3}$$

Cuya solución hace parte de un nuevo concepto de integral, concepto que hace énfasis en la integral como una herramienta que permite hallar una ecuación que representará la solución de una ecuación diferencial y deja un poco de lado su interpretación geométrica. La solución de esta ecuación la concluye Bernoulli diciendo que las *integrales* correspondientes deben ser iguales a:

$$\frac{2b^2y - 2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y - a^3} = x\sqrt{a^3}$$

Al parecer en estas instancias es que aparece por primera vez el término integral y aunque su nombre se le atribuye a Johann Bernoulli, hay quienes afirman que debería ser para su hermano Jacob el cual hizo significativas contribuciones. Se resalta históricamente el hecho que se le otorgue un nombre a la integral, puesto que, según Moran Pizarro (2014) citando a Recalde (2011) "con la incorporación de un nombre para designar una operación específica, se está identificando una noción que amerita un tratamiento especial". No por ello podemos afirmar que en este momento de la historia el concepto de integral adquirió el estatuto de noción matemática, antes de que esto sucediera se necesitaba el reconocimiento de la noción de función como objeto del análisis matemático, lo cual no sucederá hasta unos años después.

Según Moran Pizarro (2014), este enfoque de la integral permitió a los matemáticos del siglo XVII solucionar una gran variedad de problemas, como por ejemplo el problema de la *catenaria* :

Dada una cadena o una cuerda inextensible fijada por dos puntos determinar su forma.

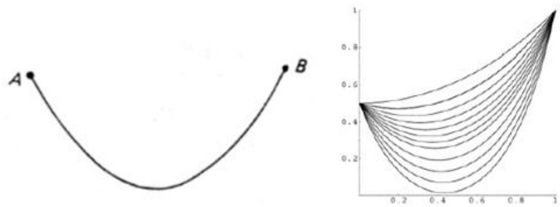


Figura 30: Forma Catenaria[27]

Según Moran Pizarro (2014), Johann Bernoulli resuelve este problema partiendo de los siguientes supuestos:

1) Es una cuerda inextensible no sufre ningún estiramiento a causa de su peso
2) Si se fija la catenaria a dos puntos A y C, la fuerza necesaria en esos dos puntos es la misma que soporta un punto D, que es igual al peso de la cuerda y esta situado en el punto de encuentro de dos cadenas de ingravidez AD y CD y son tangentes
3) Si se fija otra cadena por otro punto, $F,$ se puede eliminar la cadena, AF y la curva no cambia, los puntos restantes quedan la misma posición.
4) Si conservamos los supuestos anteriores, a continuación, antes y después de la fijación de, $F,$ la misma fuerza (es decir la fuerza original) a posiciones particulares de la curva es la misma que si arrancara el trozo desde el punto F, esto no es si no un corolario del número anterior. En consecuencia, como uno alarga o acorta la cadena de BFA, es decir, allí donde uno elige el punto de fijación F, la fuerza en ella no aumenta ni disminuye pero siempre bajo la posición B sigue siendo lo mismo.
5) El peso P que es sostenido por dos cadenas situados arbitrariamente AB y CB ejerce sus fuerzas en los puntos A y C en una relación tal que la fuerza necesaria en A es la fuerza necesaria en C (después de dibujar la linea vertical BG), como el seno del ángulo CBG es el seno del ángulo ABG y la fuerza del peso P es la fuerza en C, como el seno de todo ángulo ABC es el seno del ángulo opuesto ABG. Esto se demuestra en todas las teorías de la estática

[27] Tomado de Moran Pizarro (2014)

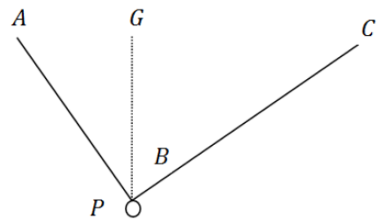


Figura 31: Propiedades mecánicas de la Catenaria[28]

Consideremos la siguiente figura

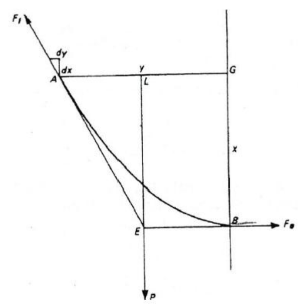


Figura 32: Relaciones en la Catenaria

De las relaciones de fuerza y los presupuestos anteriores se tiene que[29]:

$$\frac{P}{F_0} = \frac{s}{a} = \frac{dx}{dy}$$

Donde s es igual a la longitud de la cadena desde A hasta B, y $F_0 = a$ es una constante.

Luego

$$\frac{a}{s} = \frac{dy}{dx}$$

Que corresponde a la ecuación diferencial a resolver.

Para poder eliminar el parámetro s se procede de la siguiente manera

$$dy = \frac{adx}{s}$$

---

[28] Tomado de Moran Pizarro (2014)

[29] Descripción tomada de Moran Pizarro (2014, p.55)

$$dy^2 = \frac{a^2dx^2}{s^2}$$

Pero por el teorema de Pitágoras

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds^2 = dx^2 + \frac{a^2dx^2}{s^2} = \frac{dx^2s^2 + a^2dx^2}{s^2}$$

$$ds = \frac{dx\sqrt{s^2 + a^2}}{s}$$

Luego

$$dx = \frac{sds}{\sqrt{s^2 + a^2}}$$

Integrando a ambos lados

$$x = \sqrt{s^2 + a^2}$$

De esto se obtiene que

$$s = \sqrt{x^2 + a^2}$$

Y

$$ds = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Pero $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, luego:

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Y simplificando tenemos

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Según Moran Pizarro (2014), Bernoulli dice:

> Cabe señalar, en primer lugar, que debido a que $x = \sqrt{s^2 + a^2}$ y dado que $x > s$ el origen invariante de x está mas allá del vértice B y de hecho a la distancia E, ya que si $s = 0$, entonces $x = a$ necesariamente. Por lo tanto si deseamos colocar el origen de x en el vértice en si debemos establecer a $x = x + a$ (p.57).

Teniendo en cuenta lo anterior.

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

Por tanto

$$y = \int \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

Otro de los aspectos que aporta a esta nueva concepción de la integral es la representación de las funciones en series, según Bobadilla (2012), Euler, para tal fin en su *Introductio an analysis infinitorum* (1748), define en primaria instancia que: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria por esa variable y por números y cantidades constante" (p. 76).

Posteriormente y dado que para Euler las funciones representadas por expresiones algebraicas, son aquellas funciones que reciben el nombre de funciones algebraicas y las que se encuentran determinadas por expresiones trascendentes se nominan como funciones trascendentes, estas últimas para Euler, según Bobadilla (2012), "juegan un papel primordial en la integración"; razón por la cual y gracias a sus estudios realizados sobre la cuerda vibrante, Euler se ve obligado a redefinir el concepto de función de la siguiente manera:

> Función de ciertas cantidades variables es una cantidad variable que depende de las primeras, de manera que siempre que ellas cambien, la función experimenta también un cambio: la función puede ser determinada por una ley cualquiera a partir de las variables. Citado por Bobadilla (2012, p.76).

Gracias a esta definición, Euler concluye que toda función es representable por series de potencias y que la integración está estrechamente ligada con la representación en series de potencias.

A partir de este prolífico matemático, desde el siglo XVIII y durante todo el siglo XIX, la representación de una función en series atrajo la atención de los matemáticos más prominentes; razón por la cual se dedicaron grandes esfuerzos a establecer las condiciones que debía cumplir una función para ser representada en series trigonométricas. Uno de los principales representantes de esta parte de la historia fue Jean Baptiste Joseph Fourier.

A finales del siglo XIX la integrabilidad de las funciones discontinuas fue considerada independientemente, como un problema importante del análisis matemático, lo cual dio cabida a la teoría de la integración. En sus investigaciones de 1807, Fourier aborda la transmisión del calor en un cuerpo sólido y como solución a la ecuación diferencial de la difusión obtiene la siguiente serie trigonométrica:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,\ \text{con } x \in [0,2\pi]$$

Suponiendo que la integral de una suma infinita es igual a la suma de las integrales sin preocuparse por las condiciones de convergencia, Fourier calcula los coeficientes mediante integración término a término, obteniendo así las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Dada la integrabilidad de una función en un intervalo determinado, se puede obtener la representación de esta en series de Fourier. Este ilustre matemático estaba convencido de que las funciones “arbitrarias” o discontinuas de Euler se podían representar en series trigonométricas, pero estas funciones incluían un conjunto más amplio y su definición de función que es presentada en su *Thèorie analytique de la chaleur*, la cual hace énfasis en la arbitrariedad de las ordenadas de la siguiente manera:

> No estén sujetas a una ley común a todas ellas; se suceden unas a otras de una manera arbitraria, y cada una de ellas viene dada como si fuera una cantidad aislada. Fourier (1822, art 147). Citado por Bobadilla (2012, p.77).

En el momento de la historia en el cual aparece la obra de Fourier se pensaba en una función como en una expresión analítica, razón por la cual se concebía la integración y la diferenciación al estilo ‘algebraico’, como operaciones sobre fórmulas. Al considerar la integral simplemente como una antiderivada, el sentido de esta para funciones discontinuas desaparecía.

Dado que se amplió el dominio de las funciones más allá de las funciones continuas, se hizo necesario plantear un nuevo significado de la integral; sin embargo, este problema sería tratado durante muchos años como un problema que socorrería el problema central de la representación de una función en series trigonométricas.

Fourier planteó que para calcular los coeficientes de la serie trigonométrica es suficiente tener un área para la región bajo $\varphi(x)\operatorname{sen} nx$; de esta manera plantea la necesidad de volver a la interpretación geométrica de la integral e identificar esta como el área bajo la curva:

> [...]el área de la curva reducida tomada desde $x = 0$ a $x = \pi$ da el valor exacto de los coeficientes de $\operatorname{sen} x$; y cualquiera que sea la curva dada puede ser la que corresponde a $\varphi(x)$ ya sea que podamos asignarle una ecuación analítica o que no dependa de ninguna ley regular, es evidente que siempre sirva para reducir de cualquier manera la curva trigonométrica, así que el área de la curva reducida tiene, en todos los casos posibles, un valor definido el cual es el valor de los coeficientes de $\operatorname{sen} x$ en el desarrollo de la función. El caso es el mismo con los coeficientes b o $\int \varphi(x) \operatorname{sen} 2x\, dx$ (Fourier, 1822). Citado por Bobadilla (2012, p. 78).

El movimiento de *aritmetización del análisis* del siglo XIX, impone el abandono de la intuición geométrica, por lo cual se lleva a cabo una separación de las nociones de la Geometría intuitiva ligadas al movimiento físico, y se hace énfasis en los conceptos de función, variable, límite, con un carácter esencialmente aritmético y lógico.

2.5.2 Formalización del Cálculo por parte de Cauchy

Cauchy, en busca de dar una definición exacta de integral, para así poder abordar sus características y propiedades, comienza por conceptualizar las nociones de cantidad, función, límite, continuidad y convergencia de series[30] entre otras. Algunas de sus definiciones las hacen de forma tal que una es la base de la definición de la otra, por ejemplo con base en su definición de función, describe el concepto de límite y posteriormente se refiere a la derivada y a la integral como un límite particular. En principio para referirse a la medida absoluta de las magnitudes, Cauchy, emplea los números en el sentido aritmético; los números precedidos de signo serán a lo que Cauchy llame cantidad y una *cantidad variable* será aquella que recibe sucesivamente varios valores. En estas definiciones, Cauchy se desliga completamente de sus interpretaciones geométricas al punto que no se remite a ellas ni siquiera con fines aclaratorios. Según Bobadilla (2012), con respecto al concepto de función Cauchy escribe:

[30] No en este orden específico

> Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable (Cauchy, 1994, p.78).

Antes de Cauchy la idea de límite se encontraba estrechamente ligada a procesos infinitos de aproximación, pero, carecía de una definición precisa que le permitiera ser una base robusta para los conceptos fundamentales del Cálculo así como Cauchy quería que lo fuese en su teoría; razón por la cual, según Montilla Erazo (2014) le otorga la siguiente definición:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por diferir de este tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todos los demás. Así por ejemplo un número irracional es el límite de diversas fracciones que dan valores cada vez más próximos de él. En Geometría, la superficie del círculo es el límite hacia el cual convergen las superficies de los polígonos inscritos, mientras que el número de sus lados crece cada vez más. (Cauchy, 1994, p.76).

Esta definición anterior le permitirá a Cauchy definir cantidades infinitamente pequeñas y cantidades infinitamente grandes, que según Bobadilla (2012):

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que descienden por debajo de cualquier número dado, esta variable deviene lo que suele llamarse un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña.
> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable crecen más y más, de manera que ascienden por encima de cualquier número dado, se dice que esta variable tiene por límite al infinito positivo [...] los infinitos positivos y negativos son designados conjuntamente bajo el nombre de cantidades infinitas. (Cauchy 1994, p.76)

Ahora Cauchy siguiendo lo estricto de su análisis define una función continua; lo cual según Bobadilla (2012), hace de la siguiente manera:

> La función f(x) permanecerá continua respecto de x entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función. (Cauchy, 1994, p.90).

Todo lo anterior son las bases que le permiten a Cauchy dar una definición formal de la integral y lo hace de la siguiente manera según Moran Pizarro (2014)

Sea una función $y = f(x)$ definida en el intervalo $[x_0, X]$ tomando la partición $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n = X$ Se define la sucesión de diferencias, $x_1 - x_0, x_2 - x_1, X - x_{n-1}$

Y la suma: $s_n(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$

El valor de s_n depende de n y de máx$\{ x_1 - x_0, x_2 - x_1, X - x_{n-1}, \} = \|P\|$

En caso de que el límite s_n exista cuando n tiende a infinito y cuando $\|P\|$

Tiende a cero entonces este límite se denomina

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx$$

CAPÍTULO 3: RESUMEN Y ANÁLISIS DE LAS PROPUESTAS DE ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL

3.1 INTRODUCCIÓN

Luego de realizar el capítulo sobre algunos elementos del desarrollo histórico del concepto de integral, realizamos la búsqueda de aquellas propuestas, en las que se hiciera uso de la historia de la integral para la enseñanza de la misma. Esta búsqueda se realizó en diferentes catálogos de revistas, libros, revistas, memorias, monografías etc. relacionados o no con la línea de investigación Historia de las Matemáticas–Enseñanza de las Matemáticas (HM-EM); en esta búsqueda aunque fue minuciosa, aclaramos que no todos los artículos, libros y memorias fueron leídas a profundidad, solo se realizaba una revisión para identificar cuáles de ellos tenían una relación con la integral y su enseñanza. El siguiente cuadro nos permite evidenciar detalladamente, la búsqueda realizada para hallar las propuestas que serán descritas y analizadas posteriormente:

Tabla 1 Revistas HM-EM

REVISTA	NÚMERO DE ARTÍCULOS CONSULTADOS
Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education	5
Enseñanza de las Ciencias	8
Educación Matemática	12
Ema. Investigación e innovación en Educación Matemáticas	3
Épsilon	3
Educational Studies in Mathematics	36
For the Learning of Mathematics	86
International Journal of Computers for Mathematical Learning	1

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology	31
International Journal of Science and Mathematics Education	4
Journal of Mathematical Behavior	3
Journal of Mathematics Teacher Education	7
Mathematics Education Research Journal	3
Mathematical Thinking and Learning	3
Números	11
Pna: Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas	4
Quipu: Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología	10
Recherches en Didactiques des Mathematiques	4
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	19
Research in Mathematics Education	2
Suma	44
The Montana Mathematics Enthusiast	7
Unión	31
Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas	8
ZDM : The International Journal on Mathematics Education	32
The Mathematical Gazette	24

Mathematics in School	27
Mathematics Teacher	24
Mediterranean journal for reseach in Mathematics Education	12
Science & Education	13

Tabla 2 Libros HM-EM

LIBROS	EDITORES
Tópicos de historia da matemática para uso em sala de aula	John k. Baumgart
Math Through the Ages	William P. Berlinghoff & Fernando Q. Gouvea
Tópicos de historia da matemática para uso em sala de aula	Carl B. Boyer
Vita mathematica	Ronald Calinger
Topicos de historia da matematica para uso em sala de aula	Howard Eves
History in mathematics education	John Fauvel & Jan van Maanen
Philosophical dimensions in mathematics education	Karen Francois & Jean Paul van Bendegem
Tópicos de hm para uso em sala de aula_números e numerais	Gundlach Bernard
Mathematical time capsules	Dick Jardine & Amy Shell-Gelash
Handbook on the history of mathemtics education	Alexander Karp & Gert Schubring

Using history to teach mathematics.	Victor katz
Historical topics for the classroom	John K. Baumgart
Crossroads in the history of mathematics and mathematics education	Bharat Sriraman
Learn from the masters	Frank Swetz, John Fauvel, Otto Bekken, Bengt Johansson, Victor Katz

Tabla 3 Memorias de eventos HM-EM

MEMORIAS	**PONENCIAS**
8th congress of European research in mathematics education	22
37th conference of International Group for the Psychology of Mathematics education	5

Luego de realizar la consulta de los documentos anteriormente presentados, se identificaron 8 propuestas en las que consideramos que usan algunos elementos de la historia para la enseñanza del concepto de integral. En algunas propuestas se encuentran elementos de la historia del concepto de integral que inicialmente no se tuvieron en cuenta en la realización del capítulo II, principalmente los asociados a los trabajos de Fermat y Barrow, pero debido a la naturaleza de las propuestas y teniendo en cuenta los aportes de estos matemáticos para el desarrollo del Cálculo y en especial el desarrollo de la integral, se incluyeron estas propuestas en el catálogo que se muestra a continuación.

Tabla 4 Catálogo de propuestas

PROPUESTA	DESCRIPCIÓN
Sauerheber, R. D. (2010). Geometric Demonstration of the Fundamental Theorems of the Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(3), 397–403	A partir de la demostración geométrica, se probarán algunas reglas generales de integración

Sauerheber, R. D. (2012). Teaching the Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(1), 85–100.	Se presenta la secuencia histórica de los métodos empleados por Newton en su aproximación a los teoremas fundamentales del Cálculo.
Prabhu, V., & Czarnocha, B. (2008). Los indivisibles en el cálculo contemporáneo. *Educación Matemática*, *20*(1), 53–88.	A partir de la obra de Wallis y Cavalieri y con base en la intuición de un estudiante sobre los indivisibles, se formulan dos integrales: la integral de Cavalieri-Wallis y la integral de Porter-Wallis las cuales ofrecen una nueva perspectiva de los conceptos clásicos de medida área e integral definida.
Escudero, M. (1997). Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. *SUMA*, 24, 77–79.	Se llevan al aula los procesos realizados por Arquímedes y Fermat para encontrar el área bajo la curva $y = x^n$ y el volumen del paraboloide de revolución respectivamente.
Flashman, M. E. (1996). Historical Motivation For A Calculus Course: Barrow's Theorem. In R. Calinger (Ed.) *Vita Mathematica*: *Historical research and Integration with Teaching* (309-316). Washington D. C: The Mathematical Association of America.	Se presenta a los estudiantes el teorema de Barrow con el fin de que ellos estén preparados para las etapas posteriores del curso de Cálculo en el cual se trataran el problema del área, la tangente y la versión moderna del Teorema Fundamental del Cálculo.

Gellasch, A. shell. (2011). Integration à la Fermat. In D. Jardine & A. S. Gellasch (Eds.), *Mathemtical Time Capsules* (111–116). Washington D. C:The Mathemetical Association of America.	Luego de introducir la integral de Riemann, se puede ampliar la perspectiva del Cálculo, puesto que el método de Fermat incorpora otros métodos como sumas de series, factorización, límites e historia.
Fernández, L. (2011). *La Historia como herramienta didáctica : el concepto de integral*. Universidad de Cantabria, España.	Esta propuesta se fundamenta en el desarrollo histórico que desembocó en el Cálculo Integral, teniendo en cuenta el orden histórico, avances y ciertas consideraciones de la autora para facilitar la comprensión del concepto.
Haverhals, N., & Roscoe, M. (2010). The History of Mathematics as a Pedagogical Tool: teaching the integral of the secant via *Mercator*'s projection. *Montana Mathematics Enthusiast*, *7*(2000), 339–368.	Se hace uso de la historia para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, en especial se basarán en la proyección de *Mercator* y su conexión con la integral de la función secante

Una vez encontradas estas propuestas, realizamos una lectura detallada de cada una de ellas para así elaborar una serie de resúmenes, en los cuales lográramos destacar las ideas principales de dichas propuestas y las consideraciones de los autores acerca del uso de la historia de las matemáticas para su enseñanza. Cada propuesta tiene un respectivo análisis, en el cual tratamos de responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué se usó de la historia de la integral?
- ¿Cómo se usó la historia de la integral?

Para responder a la primera pregunta se tuvo en cuenta algunos de los trabajos de los matemáticos que desarrollamos en el Capítulo II y los trabajos de otros matemáticos que en las mismas propuestas encontramos, como es el caso de los trabajos de Barrow y Fermat. Para dar respuesta a la segunda cuestión se tuvo en cuenta la clasificación recomendada por Mora & Guacaneme (2014), quienes responden a tales cuestionamientos teniendo en cuenta las siguientes formas de intervención de la Historia de las Matemáticas:

- ***Alusión a la Historia de las Matemáticas:*** Se refiere al uso de la Historia de las Matemáticas para presentar anécdotas, hechos, fechas, épocas de interés, obras de matemáticos, ejemplos de problemas matemáticos provenientes de la historia o estudio de estrategias utilizadas para resolver ciertos problemas, bien para introducir un tema o para motivar su estudio.

- ***Integración de la Historia de las Matemáticas:*** Tiene que ver con la enseñanza efectiva de las Matemáticas a través de la Historia de las Matemáticas, el análisis eficiente de los procesos cognitivos del aprendizaje y la comprensión, mediado por la Historia y, la enseñanza de las Matemáticas que incluye su Historia como parte consustancial de las Matemáticas

- ***Determinación de la enseñanza a partir de la Historia de las Matemáticas:*** Corresponde al uso de la Historia de las Matemáticas de una manera profunda; la Historia de las Matemáticas sustenta o fundamenta las acciones didácticas que se realizan en el aula o la organización curricular en general.

A continuación presentamos las propuestas encontradas, incluyendo en cada una de ellas un resumen y su correspondiente análisis a la luz de las dos cuestiones mencionadas anteriormente.

3.2 GEOMETRIC DEMONSTRATION OF THE FUNDAMENTAL THEOREMS OF THE CALCULUS

3.2.1 Resumen

Sauerheber (2010) afirma, en el resumen de su artículo, que a partir de una sencilla y profunda demostración, empleando funciones geométricas simétricas, se describirá la validez de las reglas generales de integración y diferenciación. La diferenciación y la integración se llegarán a ver como operaciones inversas obtenidas a partir del cálculo de pendientes y el área bajo una curva, sin usar límites o sumas algebraicas infinitas. Se mostrarán algunas aplicaciones del Cálculo en matemáticas, física y química.

El Cálculo es una parte central de las matemáticas que describe propiedades exactas de curvas (como la pendiente en un punto dado o el área bajo una curva) y las cantidades que varían lineal o no linealmente. Para cualquier ecuación que calcula el área bajo una curva, la fórmula para las pendientes de esta ecuación, es la ecuación de la curva bajo la cual se determinó el área. Cualquier función $y = ax^n$ tiene pendiente dada por $y = nax^{n-1}$ y área entre dos extremos dada por $ax^{n+1}/(n+1)$. La simple Geometría confirma algunas de las reglas generales del Cálculo para un infinito números de funciones, por ejemplo cualquier ecuación de la forma $y = ax$ cuando se integra se llega a $y = ax^2/2$, porque el área de un triángulo bajo la línea está dado por $\frac{1}{2} base \cdot altura$ con base x y altura ax; para cualquier línea horizontal $y = b$ el área rectangular bajo esta, es bx, con base x y altura b. Estas integrales usando la notación de Leibniz serian $\int bx^0 dx = bx^{0+1}$ y $\int x^1 dx = x^{1+1}/2$. Aunque parezca increíble, esta progresión continúa como una serie, incluso para áreas bajo las curvas, como $\int x^2 dx = x^3/3, \int x^3 dx = x^4/4, \ldots, \int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ para cualquier $n \in \mathbb{R}$. En primer lugar Sauerheber (2010) por medio de la *fish-proof* verifica que para integrar funciones $y = x^n$ se multiplica por el operador $x/(n+1)$, para esto hace uso de las funciones inversas, como $x^{\frac{1}{2}}$ y x^2 o en general $x^{\frac{1}{c}}$ y x^c, las cuales son simétricas respecto a $y = x$ y generan áreas iguales respecto a este eje de simetría

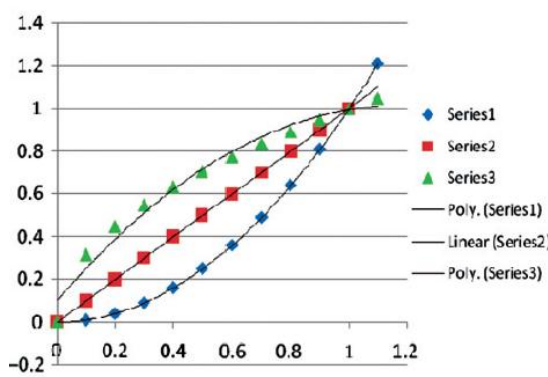


Figura 33: *Fish-Proof*

En la **Figura 33**, observamos que las funciones se intersecan en dos puntos $(0,0) y\ (1,1)$ los cuales son dos esquinas de un cuadrado unitario y que el área bajo la curva azul es igual al área por encima de la curva verde. Por tanto $\int x^{\frac{1}{c}} dx + \int x^c dx$, desde $x = 0$ hasta 1, es el área del cuadrado de lado 1; multiplicando por $\frac{x}{n+1}$ donde $n = c\ y\ \frac{1}{c}$ obtenemos $\frac{x^{c+1}}{c+1} + \frac{x^{1+1/c}}{1+1/c}$ y cuando evaluamos entre 0 y 1 llegamos a $\frac{1}{c+1} + \frac{c}{c+1} = 1$. La función para el área bajo $y = ax^n$ está dada por $a \int x^n\, dx = ax^{n+1}/n + 1$; es decir que para hallar el área bajo la curva $y = ax^n$ debemos multiplicar por el operador $x/(n+1)$ y para su correspondiente derivación debemos multiplicar por el operador $(n+1)/x$.

La integración entre dos valores x a lo largo de la función siempre determina un área que también se genera mediante la integración de la inversa correspondiente; por ejemplo integrando x^2 desde 0 hasta 2 produce un área de $8/3$; el área correspondiente a la inversa se obtiene integrando $x^{1/2}$ entre 0 y 4 a lo largo del eje x, donde y varía para esta función inversa de 0 a 2. El área total encerrada por la inversa desde o hasta 4 es $\frac{x^{3/2}}{3/2} = 16/3$; si a esta área le sumamos el área bajo la curva x^2 desde 0 hasta 2 obtenemos $\frac{16}{3} + \frac{8}{3} = 8$, que corresponde al área del rectángulo que recubre el área de las dos funciones.

A partir de lo que Sauerheber (2010) llama *fish-proof* se verifica lo que llamamos teoremas fundamentales del Cálculo donde:

- La derivada de una función, proporciona una fórmula para sus pendientes o razones de cambio, en cualquier valor deseado (llamado aquí cero teorema fundamental).
- La integral de una función proporciona una fórmula que evalúa el área bajo esta función entre dos puntos (Primer Teorema Fundamental del Cálculo).
- La derivada de la integral de una función reproduce esa misma función (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo).

En muchas universidades, colegio y libros de texto, para demostrar los teoremas fundamentales del Cálculo, se utilizan conceptos como infinitesimales, series y la teoría de límites; sin embargo el simple y ampliamente aplicable que se presentó podría llegar a ser una primera aproximación al Cálculo.

3.2.2 Análisis

Teniendo en cuenta los elementos de historia presentados en el Capítulo II y luego de leer el artículo, determinamos que Sauerheber (2010) usa de la historia lo siguiente:

- Las reglas para calcular cuadraturas usadas por Newton, en la que para encontrar la cuadratura de $f(x) = ax^n$ debemos multiplicarla por $\frac{x}{n+1}$ y así obtenemos que el área está dada por $\frac{ax^{n+1}}{n+1}$.

- La fórmula de Wallis para encontrar el área de un rectángulo y triángulo a partir de la medida de su base y su altura. Esta fórmula es usada para explicar geométricamente que la integral de la funciones del tipo $y = ax$ es $y = \frac{ax^2}{2}$.

- Los estudios de Newton sobre la relación inversa entre el cálculo de cuadraturas y el cálculo de pendientes de rectas tangentes, puesto que en la propuesta se muestra que si deseamos hallar el área bajo la curva $y = ax^n$ debemos multiplicar por el operador $x/(n+1)$ y por el contrario para su correspondiente derivación debemos multiplicar por el operador $(n+1)/x$.

Al intentar responder al cómo se usa la historia de la integral en esta propuesta, encontramos que se pretende que los estudiantes logren comprender una aproximación a las reglas generales del Cálculo y su validez dentro de un contexto matemático, por medio de pruebas geométricas, centradas en los trabajos realizados por Newton y con la ausencia de conceptos como límites, sucesiones, series etc. Específicamente encontramos que se tiene la intención de generar en los estudiantes un aprendizaje sobre la operación de integración, las reglas generales de integración y su relación con la diferenciación, teniendo en cuenta solo los estudios realizados por Newton y algunos resultados de Wallis, los cuales son llevados al aula de tal manera que se generen actividades propias del quehacer matemático; por lo anterior podemos concluir que en Sauerheber (2010) se realiza una enseñanza de las Matemáticas a través de su historia; es por esto que consideramos que esta propuesta corresponde a la categoría de análisis de Integración de la Historia de las Matemáticas.

3.3 CLASSROOM NOTES: TEACHING THE CALCULUS

3.3.1 Resumen

En este artículo, realizado por Richard D. Sauerheber (2012), se presenta la secuencia histórica de los métodos empleados por Newton en su aproximación a los teoremas fundamentales del Cálculo. Se afirma que gracias a estos, los estudiantes lograrán comprender los conceptos básicos del Cálculo en su origen. En la exposición, y con el fin de facilitar la comprensión, se vinculan otros métodos que en la actualidad son de uso común. A partir de ello se clarifica la naturaleza y el significado de diferenciación e integración.

El artículo inicia con un apartado, con título *Basic Calculus*, en el que se afirma que en los primeros cursos de Cálculo es importante mostrarles a los estudiantes los métodos con los cuales Newton descubrió el Cálculo y demostró algunos de sus resultados. Según Sauerheber (2012) Newton descubre a través de la aproximación gráfica el Segundo

Teorema Fundamental del Cálculo, es por esto que en el primer ejemplo, se explica tal Teorema a partir de la siguiente figura:

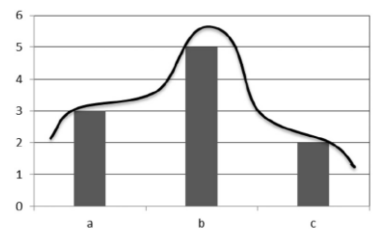


Figura 34: *The 2nd Fundamental Theorem of Calculus*

En este ejemplo, se muestra que la derivada de la función área, es la función que se muestra en la **Figura 34**, para esto calculan un área ΔA, a partir de calcular en cada punto a, b y c un área determinada por $\Delta x f(a), \Delta x f(b),$ $\Delta x f(c)$ dividiendo estos resultados entre Δx obtenemos $f(a), f(b), f(c)$ respectivamente, y en general tenemos que $\frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)$.

Enseguida, a partir de las funciones f y g, con $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$, que se muestran en la **Figura 35**, se evidencia que las áreas de los triángulos rectángulos (que se determinan con el eje x, la recta que representa a f y la recta vertical) son descritas por la función g, para la cual las pendientes de las rectas tangentes en cada punto a lo largo de esta, están dadas por la función f evaluada en ese punto. A partir de relaciones como la anterior, se llega a la conclusión que la derivada de g es f y la integral de f es g.

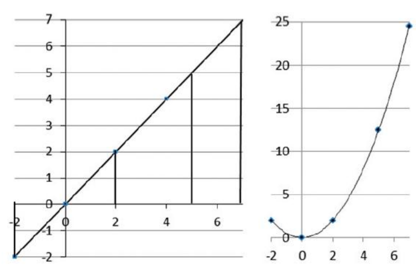


Figura 35: $\boldsymbol{f(x) = x}$ y $\boldsymbol{g(x) = \frac{x^2}{2}}$

A partir de la gráfica de la función f, se muestra cómo calcular el área de esta función en un intervalo especifico (a, b) y para esto, se restan las áreas de dos triángulos que se encuentran solapados y cuyas bases son a y b respectivamente. Gráficamente se observa, que esta resta de áreas da como resultado el área de la región buscada, concluyendo que las áreas de los triángulos dibujados bajo $f(x) = x$, se calculan restando los valores correspondientes de x en $g(x)$; es decir que el área bajo función f, en el intervalo (a, b), está dado por $g(b) - g(a)$.

En este apartado se hace referencia al método realizado por Fermat para calcular pendientes, el cual, según Sauerheber (2012), es muy preciso, pero no tiene el potencial de suplantar la definición de integral y derivada que están presentes en el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Si se usaran los métodos de Fermat, la verificación de que cualquier función es a la vez tanto el integrando como el derivado de su integral, sería bastante tediosa de realizar e injusta cuando se tiene al alcance el Cálculo. En este apartado se llega a la conclusión que los estudiantes deben comprender que al poseer una tabla de derivadas, también tienen una tabla de integrales, debido a la relación que existe entre las dos operaciones; para mostrar esto, se toma como ejemplo las funciones $f\ y\ g$ con $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \ln(x)$. Sobre este apartado cabe resaltar, que se hace énfasis en mostrar la naturaleza de la relación que existe entre la integral y la derivada, por medio de ejemplos y funciones muy sencillas de analizar para los estudiantes que se inician en el Cálculo y se concluye que la integral y la derivada son operaciones inversas, lo cual en algunos casos los estudiantes no comprenden tan fácilmente.

El segundo apartado *Proof of Second Fundamental Theorem,* inicia con una reflexión acerca de la importancia del Cálculo, de cómo el Segundo Teorema Fundamental llevó a la creación de algunas reglas de integración, derivación y teoremas que no dependen de la definición de tangente, realizadas por Fermat. La prueba del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, permitirá a los estudiantes clarificar algunas dudas que se pueden presentar sobre este. La prueba inicia a partir de dos funciones como se muestra a continuación

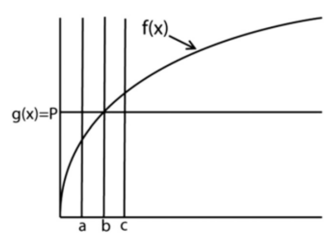


Figura 36: Gráfica usada para la demostración del Segundo Teorema Fundamental

Esta prueba usa lo que en la actualidad se conoce como el Teorema del valor medio. En primer lugar, se encuentra un punto en el cual $f(x) = g(x)$, este punto es (b, P). Se usa una idea de los indivisibles de Cavalieri, puesto que se menciona que todos los *threads* (hilos), a lo largo del eje x, recubren toda el área debajo de la función; sin embargo en la prueba original, Newton uso ciertas reglas del movimiento para recubrir el área en el plano. En principio se muestra que la suma de todos los rectángulos infinitesimales entre 0 y b, cuyas áreas son $dA = Pdx$, cubren exactamente el área Pb, en la cual el área entre 0 y a es Pa y el área entre a y b es $Pb - Pa$. Enseguida se muestra, que para cualquier valor de x, el área de la línea vertical entre el eje x y la curva f, es la misma que el área de la línea vertical, entre el eje x y el punto de intersección entre la curva f y la recta curva g.

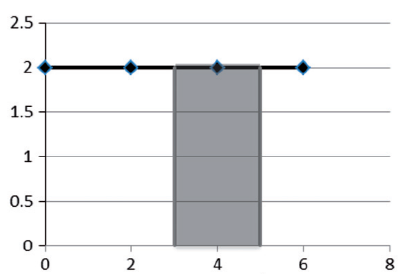
Para finalizar, se menciona que el hilo de área determinado por un valor de x, está determinado por $dF(x) = f(x)dx$, el cual es igual a $dA(x)$, debido a la correspondencia de intersección horizontal; por lo que el área de una función integral f, se calcula por medio de F, en la que el conjunto de tangentes, con pendientes $\frac{dF(x)}{dx}$, son los valores ordinales de $f(x)$; siendo cada uno la altura, de los hilos delgados de área, entre el eje x y f. Cualquier función f es la derivada de F, entonces $F(b) - F(a)$, automaticamente calcula el área que se encuentra entre el eje x, f y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$. Para determinar si una función F es una integral de cualquier función f, se determina la derivada de F que de hecho es f. El poder de las reglas del Cálculo, confirma estas verdades sobre las funciones del tipo ax^n y también muestra otros métodos que pueden ser utilizados para funciones de otro tipo; incluyendo sustituciones trigonométricas, integración por partes y series de integración.

El tercer apartado, *The calculus mechanism*, inicia con las relaciones existentes entre la derivada y la integral para cualquier función. Por ejemplo se menciona que cualquier diferencia en los valores ordinales $F(b) - F(a)$ es la suma neta de los numeradores dy de todas las tangentes a lo largo del intervalo; también que $b - a$ es la suma de todos los hilos verticales con ancho dx a lo largo del intervalo así como la suma de todas las líneas de hilos finos de áreas, debajo de la derivada, por lo que no es necesario, calcular un número masivo de valores ordinales algebraicamente a lo largo de f, porque la integral automáticamente hace las sumas y encuentra el área exacta. Es por lo anterior que Leibniz usa la suma como símbolo de la integral y escribimos que $\int f(x)dx$ de $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, para cualquier función continua; el cual es el Primer Teorema Fundamental del cálculo. Por medio de las curvas $y_1 = \frac{x^4}{2}$ y $y_2 = x^3$, se muestra, cómo dos o más curvas pueden compartir un mismo punto, es decir $f(a) = g(a)$, por lo que, el área de la línea de hilo fino en ese punto es igual; pero la pendiente en ese punto para las dos o más curvas pueden llegar a ser diferentes.

El cuarto apartado, *Optional extended analysis (for any with questions)*, inicia explicando por qué la razón de cambio en el punto (b, P), es el mismo para las funciones f y g en la **Figura 36**; también se realiza un análisis desde una perspectiva física, introduciendo las nociones de velocidad y tiempo. Allí explican el por qué dx y dA en un punto (x, p), no son afectados por la velocidad v constante, puesto que $dx = vt$ y para dos tiempos correspondientes $v_2t_2 = dx$ y $v_1t_1 = dx$, entonces $dA = f(x)dx = pv_2t_2 = pv_1t_1$, por lo que para cualquier tiempo y velocidad correspondiente, la razón de cambio dA respecto a dx no se ve afectada, esto porque $\frac{dA}{dx} = \frac{pv_2t_2}{v_2t_2} = P$ y $\frac{dA}{dx} = \frac{pv_1t_1}{v_1t_1} = P$. Como conclusión, se afirma que el Teorema Fundamental del Cálculo, es más evidente, cuando las funciones son inversas y tienen pendientes de tangentes muy inclinadas.

Por último, en el apartado número 5, *Applications and significance*, el autor afirma que para los estudiantes, es un gran hallazgo saber, que para obtener el área bajo la curva de cualquier función, solo es necesario encontrar una expresión cuya derivada es la función de la cual deseamos obtener el área entre esta y el eje *x*. En este apartado el autor muestra que para funciones del tipo ax^n, su integral es obtenida multiplicando ax^n por $\frac{x}{n+1}$ y por el contrario para obtener su derivada es necesario multiplicar ax^n por $\frac{n}{x}$.

Más adelante el autor a partir de las funciones f y F con $f(x) = 2$ y $F(x) = 2x$ (ver **Figura 37**), realiza una explicación del por qué la integral de la función f es F y afirma que esto es cierto no solo porque el área bajo la función f está dada al multiplicar la altura de un rectángulo de altura 2 y base x, sino también porque las pendientes de las funciones F, están dadas por la función f. Si deseamos calcular el área bajo la función f entre dos valores a y b, procedemos $\int_a^b 2dx = 2x]_b^a = 2a - 2b$. A partir de las ideas anteriores explica la regla del producto y del cociente en la derivada y hace énfasis en que se debe trabajar el concepto de derivada e integral de la mano así como ocurrió históricamente.



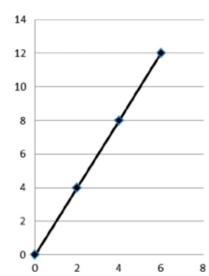


Figura 37: $f(x) = 2$ y $F(x) = 2x$

El autor afirma que no se debe subestimar la utilidad y el alcance del Cálculo, puesto que con este podemos llegar a comprender y explicar las leyes de la Física y por tanto el mundo que nos rodea. Por ejemplo podemos conocer la distancia lineal acumulada de un objeto en movimiento, si integramos una función que cuyas variables sean la velocidad $(y = v)$ y el tiempo $(x = t)$.

El Cálculo probó la afirmación de Kepler, la cual decía que las áreas barridas por los radios con extremos en el Sol y los planetas son proporcionales al tiempo empleado por estos en recorrer su órbita. También, gracias al Cálculo podemos comprender las leyes de la luz, la cual es estudiada en Física, Química y Biología, y que gracias a los trabajos de Maxwell sabemos que la luz se propaga de forma sinusoidal como ondas electromagnéticas. Para conocer un poco más de las propiedades de la luz, el autor propone determinar la longitud de curva de la función seno (ver **Figura 38**); este problema según Sauerheber (2012), es un complejo problema ya sea para el Álgebra, Trigonometría o Geometría, así que tomamos las ventajas del Cálculo para resolverlo.

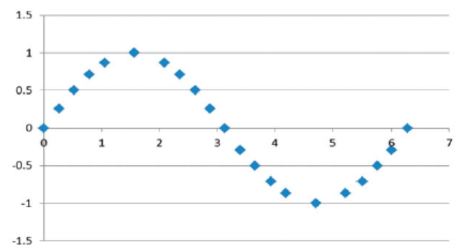


Figura 38 Longitud de arco de la función seno

3.3.2 Análisis

Teniendo en cuenta nuestros elementos de historia realizados sobre Newton y luego de leer el artículo, encontramos que en el artículo se usa de la historia lo siguiente:

- La noción de los infinitesimales de Kepler y retomada por Newton, puesto que en la **Figura 34**, observamos que calculan el área de tres rectángulos infinitesimales que se generan al moverse a la derecha una distancia Δx en los puntos $a, b\ y\ c$.
- Los estudios de Newton sobre la relación inversa entre el cálculo de cuadraturas y el cálculo de pendientes de rectas tangentes, puesto que por medio de la **Figura 34** llegan a la conclusión de que $\frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)$, donde $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ representa la derivada en un punto de la función F.
- La fórmula de Wallis para encontrar el área de un triángulo cualquiera a partir de la medida de su base y su altura $\frac{m \times l}{2}$. Esta fórmula es usada para explicar geométricamente que la integral de la función $f(x) = x$, es la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$.
- La noción de los indivisibles de Cavalieri, puesto que en la prueba del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se hace referencia a que al juntar todos los hilos (*threads*) a lo largo del eje x, se cubre toda el área bajo cualquier función; lo anterior es equivalente a la idea de la colección de "todas las líneas" que recubren el área de una figura.
- La integral definida de Newton, usando la notación de Leibniz: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ en donde $F(x)$ es la función área determinada por $f(x)$ o $F(x)$ es la

antiderivada de $f(x)$; en el artículo esto es nombrado como el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

- Las reglas para calcular cuadraturas usadas por Newton, en la que según el artículo para encontrar la cuadratura de $f(x) = ax^n$ debemos multiplicarla por $\frac{x}{n+1}$ y de esta manera se obtiene que $A = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$.

Al intentar responder al cómo se usa la historia de la integral en esta propuesta, observamos que en esta se pretende que los estudiantes lleguen a una comprensión de los conceptos básicos del Cálculo desarrollado por Newton y sus teoremas fundamentales, aunque también se usa la notación y algunos otros resultados que no son propios de él. Para el autor de la propuesta, el énfasis de la propuesta está en mostrarles a los estudiantes solo los métodos con los cuales Newton descubrió el Cálculo y como demostró algunos de sus resultados; es decir que durante un tiempo los estudiantes estarán inmersos en los aspectos del Cálculo en su etapa temprana, cuando no contaba con el rigor con el que se dotó posteriormente. Según lo anterior, el autor usa algunos elementos de la historia de las matemáticas, específicamente elementos históricos asociados a Newton, con el fin de propiciar actividades, en las cuales los estudiantes realicen algunos de los procesos generales de la actividad matemática y logren un aprendizaje asociado al Cálculo; es por esto que consideramos que esta propuesta corresponde a la categoría de análisis de Integración de la historia de las matemáticas**.**

3.4 LOS INDIVISIBLES EN EL CÁLCULO CONTEMPORÁNEO

3.4.1 Resumen

El artículo de Prabhu & Czarnocha (2008) inicia con un resumen en el cual los autores afirman que las fórmulas que se van a presentar son una reformulación de la obra de Wallis y Cavalieri y de esta manera buscan proporcionar fundamentos matemáticos rigurosos contemporáneos y que con base en la intuición de un estudiante (los indivisibles de Arquímedes, Cavalieri y Wallis) se formulan dos integrales: la integral de Cavalieri-Wallis y la integral de Porter-Wallis. Estas integrales ofrecen una nueva perspectiva de los conceptos clásicos de medida, área e integral definida.

Luego en la introducción indican que su objeto de estudio son los indivisibles que no tienen anchura, centrándose en los indivisibles desde el punto de vista de Wallis y Cavalieri; enseguida destacan las ideas más importantes de los trabajos de los tres matemáticos sobre sus trabajos de cuadraturas y que nosotros hemos mencionado en nuestro recorrido histórico. Enseguida se presentan las preguntas de investigación planteadas en el experimento de enseñanza Introducción de los Indivisibles en la Enseñanza del Cálculo: ¿Cómo tiene lugar el proceso de transformación y desarrollo de la intuición de las líneas (los indivisibles) en un concepto matemático preciso? y ¿La introducción de la construcción de Cavalieri-Wallis basada en los indivisibles, la interacción de esa construcción con la construcción normal de Riemann y la enseñanza en la que se integran una y otra, permiten fortalecer la comprensión de los estudiantes del concepto de integral definida? Se afirma que la integral de Porter-Wallis se presentó a los estudiantes como un paso para llegar a las sumas de Riemann, las cuales habían sido diagnosticadas difíciles para los estudiantes.

A continuación mostramos los apartados o títulos de la propuesta y mencionamos las ideas principales en cada uno de ellos.

En el marco teórico se expresa que la idea de enseñanza de los autores concuerda con la afirmación de Griffin, el cual expresa que una de las razones por las cuales se reduce el grado de éxito en las matemáticas, es la separación entre la comprensión informal e intuitiva de los estudiantes y los algoritmos que se deben aprender en la educación formal. Es por eso que se incluye el aspecto abstracto de las matemáticas y las raíces intuitivas, con el fin que los estudiantes profundicen en los dos aspectos. Para los autores el marco teórico consiste en la mezcla de teorías y metodologías que abordan tanto aspectos sociales como individuales del desarrollo cognitivo.

En la metodología se afirma que los experimentos de enseñanza del proyecto se realizaron siguiendo la metodología cíclica de la investigación de la enseñanza y el cual es un perfeccionamiento del experimento de enseñanza de la *Research in Undergraduate Mathematics Education Community*, fundada en 1996 en Estados Unidos. La metodología cíclica está planteada de la siguiente manera: Enseñanza → recolección de datos → análisis y refinamiento teórico de las estrategias de enseñanza → siguiente ciclo del experimento.

Según la metodología cíclica, el maestro deberá recolectar la información concerniente a un problema particularmente en su salón, buscar la relación entre las observaciones y el conocimiento teórico del aprendizaje existente en el campo y con base en lo anterior deberá formular nuevas hipótesis que deberán ser verificadas cuando el maestro enseñe el mismo tema de matemáticas, o puede introducir nuevas estrategias de enseñanza para evaluar y corregir su efectividad.

A continuación encontramos el título: desarrollo intuitivo del concepto, en el que se determina el cociente de los indivisibles dado por $\frac{f(x_i)}{f(b)}$ en la que $x_i \frac{(b-a)i}{n}$ determina una partición de un intervalo (a, b) de una función, luego se observa que la suma finita de esos cocientes $\frac{\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)}{(n+1)f(b)}$ está relacionada con los trabajos de Wallis y establecen lo que llaman los cocientes de Cavalieri–Wallis

$$CW_n = \frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

$$CW_n = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \left(\frac{i}{n}\right)^2}{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} f\left(\frac{i}{n}\right)}{f_{max} n + 1}$$

Por medio de la función f, definida por $f(x) = x^2$, se explica gráficamente la fórmula anterior y se llega a que "los cocientes parciales" se relacionan con las sumas de Riemann correspondientes y la correspondencia se puede establecer entre:

- CW_n y R_n una suma de Riemann construida en la misma partición equidistante del dominio del intervalo y con los mismos puntos muestra para los valores de la función

Y entre:

- CW_n y R_{n+1} Construida en una partición del dominio de malla tamaño $\frac{1}{n+1}$ con una selección especial de puntos muestra para los valores de la función.

Enseguida se encuentra el título las matemáticas del enfoque, en el cual se encuentran las siguientes definiciones:

Definición 1. La integral de Cavalieri-Wallis

Sea $f: [a, b] \to R$ una función acotada:

$$CW \int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty} CW_n = lim_{n\to\infty} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)}{M(n+1)}$$

Donde $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots\ x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$ y M es el supremo (la menor de las cotas superiores) de la función.

$CW \int_a^b f(x)dx$, se denomina la integral de Cavalieri-Wallis o integral CW de la función f, definida en el intervalo $[a, b]$

Definición 2. La integral de Porter-Wallis

Sea $f: [a, b] \to R$ una función acotada y para cada n, defínase la suma aproximada de la altura promedio:

$$altura\ promedio\ n(f) = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)}{n+1} = PW_n(f)$$

Donde $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots\ x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$

$PW \int_a^b f(x)dx = (b-a)lim_{n\to\infty} PW_n(f) = (b-a)lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)$

$PW \int_a^b f(x)dx$ Se denomina la integral de Porter -Wallis o integral PW de la función f definida en el intervalo $[a, b]$.

En la propuesta se muestran las diferencias entre estas dos integrales de acuerdo con los cálculos que se obtienen con ellas y la forma en que se llegan a ellos; y los autores afirman que desde un punto de vista de las matemáticas modernas, la claridad conceptual y de cálculo de la integral PW hace de ella una herramienta útil.

Enseguida se presenta el concepto de altura promedio, el cual es el fundamento de la integral PW y CW, es por eso que se convierte en el centro de atención de los estudios futuros.

Definición 3

Sea $f: [a, b] \to R$ una función acotada:

$$altura\ promedio = lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)}{n+1}$$

Donde $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots\ x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$

Definición 4

Sea $f: [a, b] \to R$ una función acotada:

$$area\ (b-a) \to lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)}{n+1}$$

Donde $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots\ x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$, que es desde luego la integral de Porter-Wallis.

A continuación muestran cómo calcular el área de las figuras geométricas comunes como el rectángulo, triángulo, trapecio y funciones del tipo $f(x) = x^p$, utilizando la nueva definición de altura promedio.

En el título las implicaciones matemáticas, se resalta que en el caso de una función acotada $f(x)$ con dominio $[0,1]$ la integral PW emplea solo el conjunto de números racionales en el intervalo $[0,1]$ el cual tiene una medida de Lebesgue 0. Es intrigante que ese conjunto de medida de Lebesgue 0 posea información sobre el área de la región en $[0,1]$ limitada por la función $y = f(x)$ y las líneas $y = f(0)$ e $y = f(1)$, puesto que, de acuerdo con las matemáticas clásicas, el área o superficie de tal región es sustentada por la parte no conmensurable del intervalo unidad y no por el conjunto conmensurable de números racionales.

Enseguida se definen dos teoremas y sus correspondientes pruebas:

Teorema: *La clase de funciones integrables CW y PW incluye la clase de funciones Riemann integrables*

Luego de realizar la demostración del anterior teorema, se plantea el siguiente interrogante ¿existe alguna función CW y PW integrable que no sea Riemann integrable? E inmediatamente se da respuesta por medio de un ejemplo a partir de la función Dirichlet

Teorema Fundamental del Cálculo aplicado a la integral PW: si $f^{\prime}$ es continua en $[a, b]$ donde a y b son números reales, entonces

$$PW \int_{a}^{b} f^{\prime}(x)dx = f(b) - f(a)$$

En el título, para deshacer el nudo gordiano del principio de Cavalieri, se centra la atención en el principio de Cavalieri, particularmente la paradoja de Cavalieri-Torricelli, cuyo análisis mostrará una vez más el concepto de altura promedio de una región irregular. A continuación se nombra el principio de Cavalieri y se destaca que el principio de Cavalieri no establece explícitamente cómo seleccionar las líneas correspondientes; esta situación se expresa como la paradoja Cavalieri-Torricelli y a partir de la **Figura 39**, ilustran las correspondencias para las que es válido el principio de Cavalieri y para las que no lo es.

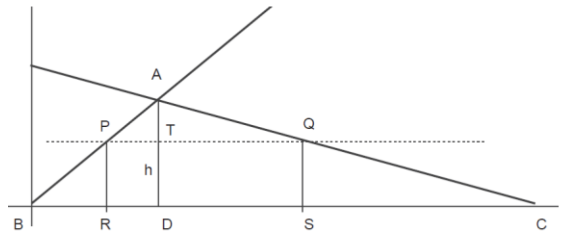


Figura 39: Figura que apoya la paradoja Cavalieri - Torricelli

En este caso si se eligen las líneas PT y TQ, entonces el principio de Cavalieri es válido; por el contrario si se eligen las líneas PR y QS no lo es.

Los autores presentan una solución a la paradoja Cavalieri – Torricelli, con la cual se introduce la noción de dilatación; los intervalos entre dos puntos correspondientes consecutivos en AC y AB están relacionados por una transformación de dilatación no homogénea en el plano $(x, y) \rightarrow (ax, y)$; esta solución revela que para un tipo de correspondencias, el aspecto esencial del argumento no es la comparación de las áreas, sino la comparación de la alturas promedio de las figuras pertinentes y, por medio de la integral PW la cual utiliza las alturas promedio de la función, introduce el paso faltante entre la transición de los indivisibles y el área. Esto lleva a los autores a demostrar el siguiente lema:

La integral de Cavalieri-Wallis es invariante con respecto a las dilataciones $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \rightarrow (\mathrm{ax}, \mathrm{y}), \mathrm{a} \neq 0$

$$CW \int_{ab}^{ac} f(x)dx = CW \int_{b}^{c} f(ax)dx$$

Por medio de Figura 40, se muestra la correspondencia entre los triángulos ABD, ACD de la **Figura 39** y los triángulos POR, QOS respectivamente.

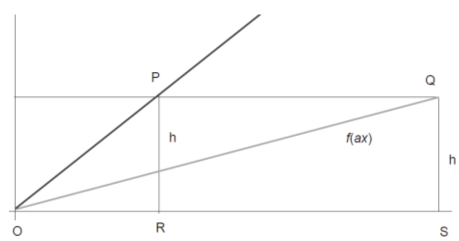


Figura 40: Dilatación

A continuación muestran cómo por medio de transformaciones de la **Figura 39** llegamos a la **Figura 40**, lo cual resulta ser una dilatación y finalmente se concluye que:

$$CW\int_0^R f(x)dx = CW\int_0^s f(ax)dx = \frac{1}{2}$$

En el título análisis de la información y contribución al campo de la educación de las matemáticas, se menciona que la evaluación es el medio por el cual obtenemos indicios de la dinámica del pensamiento del estudiante, la coherencia de los conceptos y la profundidad y coordinación de su plan; estos indicios además de obtenerse por medio de evaluaciones, se recolectan por medio de transcripciones de las entrevistas clínicas llevadas a cabo al final del periodo escolar, por medio de los métodos del grupo de control que evalúan el impacto de la nueva enseñanza en los estudiantes acerca de la integral definida. Enseguida encontramos una serie de resultados del proyecto, en los cuales se muestran las pruebas en las que se responde al interrogante: ¿se fortalece en los estudiantes la comprensión del concepto de integral definida con la introducción de la integral de Cavalieri-Wallis basada en los indivisibles, la interacción de dicha construcción con la integral normal de Riemann y la enseñanza que integra una y otra construcciones?; para esto entregan algunas consideraciones y resultados de dos problemas que se les plantearon a los estudiantes. En el primero se pidió calcular el volumen de la región obtenida rotando la región delimitada por $y = x^2$, $y = 1$ y $x = 0$ en torno al eje de las y; y el otro problema incluyó una serie de preguntas alrededor de la expresión $\int_0^3 (x^2+1)dx$. Se concluyen que la construcción de la integral PW como paso para llegar a la construcción de Riemann fue realmente útil para los estudiantes en lo que respecta a la manera de abordar la integral definida.

Para finalizar, en el apartado las voces del salón de clases**,** se muestran los pasajes de los ensayos de los estudiantes citados y que permiten concluir que para algunos de ellos la integral PW es más simple en los cálculos; para otros conceptualmente es más significativo que la construcción de Riemann; y, para otros más, la construcción de Riemann es más natural. Finalmente se presentan las conclusiones generales de la investigación, en las que se resalta las características y relaciones entre las dos integrales propuestas, así como las implicaciones matemáticas de cada una; también se dejan preguntas abiertas realizadas a partir de los resultados matemáticos de la investigación y que son dirigidas a estudiantes universitarios.

3.4.2 Análisis

Teniendo en cuenta nuestros elementos de la historia realizados sobre Cavalieri, Wallis y los que se encuentran en el artículo, encontramos que Prabhu & Czarnocha (2008) usan de la historia lo siguiente:

- Los resultados obtenidos por Wallis cuando estaba estudiando las razones de sucesiones de la siguiente naturaleza: $\frac{0^k+1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+n^k+\cdots+n^k}$ y concluye que si $k=2$, entonces $\frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$; este resultado es nombrado en Prabhu & Czarnocha (2008) como el cociente Cavalieri-Wallis y se puede reescribir de la siguiente manera $CW_n=\frac{\sum_{i=0}^{i=n}\left(\frac{i}{n}\right)^2}{n+1}=\frac{\sum_{i=0}^{i=n}f\left(\frac{i}{n}\right)}{f_{max}n+1}$
- La noción de los indivisibles de Cavalieri y el principio de Cavalieri, con el cual se hace referencia a la paradoja Cavalieri-Torricelli, la cual nos expresa que existen correspondencias entre los indivisibles de dos figuras, para las cuales el principio de Cavalieri no es válido.
- La integral definida de Newton $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, en la propuesta es aplicada a la integral Porter-Wallis $PW\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$

En esta propuesta, se usa la historia partiendo desde los estudios de Cavalieri y Wallis, los cuales son reformulados; en especial se reformulan las fórmulas de Wallis, para así proporcionar fundamentos rigurosos correspondientes a las matemáticas contemporáneas y es así como se determinan la integral de Cavalieri-Wallis la cual permite hallar la razón entre dos áreas y la integral de Porter-Wallis que permite calcular el área misma, usando el concepto estadístico del promedio. Otro aspecto que nos permite identificar cómo se usa la historia de las matemáticas en esta propuesta, es el presentar una solución a la paradoja Cavalieri-Torricelli en la que la integral Cavalieri-Wallis toma un papel fundamental, puesto que esta integral es invariante con respecto a las dilataciones que se proponen y es una propiedad que por ejemplo, la integral de Riemann y de Porter-Wallis, no poseen. Teniendo en cuenta lo anterior observamos que los estudios asociados a los trabajos de Cavalieri y Wallis, fundamentales para el desarrollo de la integral, son replanteados y combinados con las teorías actuales para así crear una teoría alterna, la cual permiten generar nuevos estudios e investigaciones en cuanto a la enseñanza de la matemática y la matemática misma. Con esta perspectivas consideramos que la metodología y la forma como se usa la historia en esta propuesta no corresponde totalmente a ninguna de las tres categorías mencionadas en Mora & Guacaneme (2014), es por esta razón que tenemos la necesidad de encontrar una categoría alterna para ubicar esta propuesta allí. Esta categoría tendría la siguiente definición:

- ***Determinación de nuevos estudios a partir de la Historia de las Matemáticas:*** Corresponde al uso de algunos elementos de la historia, para que a partir de estos realizar una reformulación, generando nuevos estudios que permitan evidenciar una perspectiva diferente sobre algún concepto o problema matemático.

3.5 FERMAT Y ARQUÍMEDES EN LAS CLASES DE INTEGRALES

3.5.1 Resumen

En Escudero (1997) se describen dos propuestas de clase en las cuales se desarrolla el concepto de integral por medio de dos algoritmos que utilizaron Fermat y Arquímedes para hallar el área bajo la curva $y = x^n$ y el volumen del paraboloide de revolución respectivamente.

En primera instancia la autora muestra como Fermat obtiene el valor exacto del área bajo la curva $y = x^n$ en un intervalo $[0, a]$, tomando una partición determinada y levantando los rectángulos como muestra la figura.

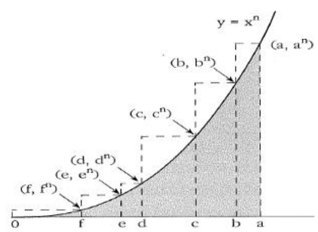


Figura 41: Área bajo la curva $\boldsymbol{y = x^n}$

A continuación Fermat afirma que si A es igual al área bajo la curva entonces:

$$A \approx (a-b)a^n + (b-c)b^n + (c-d)c^n + (d-e)d^n + (e-f)e^n + (f-0)f^n$$

Enseguida la propuesta muestra como Fermat construye una partición que le permite plantear una progresión geométrica de la siguiente manera:

Primero propone la siguiente partición $a, aE, aE^2, aE^3, aE^4, aE^5 \dots \dots (E < 1)$

Dada esta partición se afirma que el área de los rectángulos está dada por:

$(a - aE)a^n, (aE - aE^2)a^nE^n, (aE^2 - aE^3)a^nE^{2n}, (aE^3 - aE^4)a^nE^{3n} \dots \dots$ La cual es una progresión geométrica de razón < 1, que después de resolver corresponde con:

$$A \approx \frac{(a - aE)a^n}{1 - E^{n+1}}$$

Se afirma que el área bajo la curva se puede calcular haciendo a E tan cercano a 1 como se quiera, lo cual según Escudero (1997) es un paso intuitivo hacia el concepto de límite; concepto que se abordaría formalmente mucho tiempo después. Enseguida se afirma que este tipo de procedimiento le permite a Fermat concluir que:

$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Para finalizar esta parte de la propuesta, se hace un paralelo con la forma actual que permite hallar la integral de este tipo de funciones, llegando u obteniendo el mismo resultado.

Como se mencionó anteriormente, en este apartado de la propuesta la autora muestra cómo Arquímedes hace uso de las herramientas del cálculo infinitesimal[31] para demostrar que el volumen de segmento recto de un paraboloide de revolución es la mitad del volumen del cilindro circunscrito; sin embargo en este apartado se afirma que la utilización de la Geometría analítica es pertinente gracias al desarrollo mismo del curso. Lo primero que se hace es dividir el eje del paraboloide $EF = a\ en\ n$ partes iguales y se construyen cilindros inscritos y circunscritos, cómo se muestra la figura:

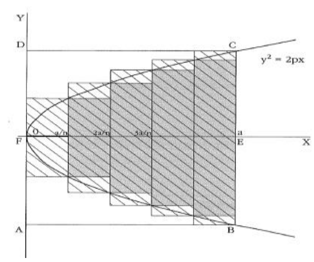


Figura 42: Volumen del paraboloide de revolución

A continuación se presenta en el documento la siguiente demostración:

$$\frac{V_{cilindro}}{V_{sólido\ circunscrito}} < 2 \text{ Y que } \frac{V_{cilindro}}{V_{sólido\ inscrito}} > 2$$

Luego demuestra que

$$V_{sólido\ circunscrito} - V_{sólido\ inscrito} = V_{última\ rodaja}$$

[31] Anacrónicamente hablando

Y por último, dado que la diferencia anterior puede hacerse menor que cualquier número dado (axioma de Arquímedes), termina por demostrar que:

$$V_{sólido\ circunscrito} = V_{sólido\ inscrito} = V_{paraboloide}$$

O también

$$V_{cilindro} = 2V_{paraboloide}$$

3.5.2 Análisis

Teniendo en cuenta nuestros elementos de la historia realizados sobre Arquímedes y los que presenta el artículo sobre Fermat, encontramos que en Escudero (1997), usan de la historia lo siguiente:

- La generalización por parte de Fermat del cálculo de integrales de potencias racionales en un intervalo específico por medio de una partición particular que le permite abordar y dar solución a este problema.
  Donde $A \approx (a-b)a^n + (b-c)b^n + (c-d)c^n + (d-e)d^n + (e-f)e^n + (f-0)f^n$
- Los trabajos de Arquímedes con los cuales él da solución al problema del paraboloide (descrito anteriormente en el resumen) y enfatiza en este, como las herramientas del cálculo infinitesimal son las que le permiten concluir que $V_{cilindro} = 2V_{paraboloide}$

Según Escudero (1997) la intención de la propuesta es romper la monotonía de la clase y para esto buscó dos ejemplos de problemas históricos que pudiese llevar al aula, para lo cual presentó a los estudiantes las estrategias desarrolladas por Fermat y Arquímedes para hallar el área bajo la curva $y = x^n$ y el volumen del paraboloide de revolución respectivamente. Teniendo en cuenta lo anterior, concluimos que la historia de las matemáticas es usada en la propuesta como un ejemplo de los problemas matemáticos, provenientes de la historia respecto al tema de integración y las correspondientes estrategias para su solución. Consideramos que la categoría correspondiente para la intención y desarrollo de esta propuesta es Alusión a la Historia de las Matemáticas**.**

3.6 *HISTORICAL MOTIVATION FOR A CALCULUS COURSE: BARROW'S THEOREM*

3.6.1 Resumen

La propuesta de Flashman (1996) menciona que el Cálculo tiene un rol principal en el programa de Matemáticas en los colegios de Estados Unidos. Según Flashman (1996) en los cursos de precálculo, los problemas de tangencias y áreas no son tratados a fondo, en consecuencia los estudiantes inician el estudio del Cálculo con un conocimiento mínimo sobre estos problemas; sin embargo ellos son conscientes que estos problemas se han trabajado con gran vigor antes del desarrollo del Cálculo de Newton y Leibniz. Los estudiantes asumen que los creadores del Cálculo llegaron a los métodos y resultados simultáneamente sin un desarrollo histórico anterior; incluso pueden concluir que solo existe un método para resolver estos problemas y que los procedimientos que van a aprender en los cursos de Cálculo, son el principio y el fin de la historia. Flashman (1996) afirma que desde el año 1987 ha tratado de desarrollar secuencias históricas en los cursos de Cálculo, iniciando con discusiones de los trabajos anteriores a Newton y Leibniz.

Los estudiantes verán que las matemáticas se han convertido poco a poco, en una revolución repentina marcada por el genio de unos pocos individuos; este aspecto humano de las matemáticas es importante para un curso en el que frecuentemente se llega a confundir las matemáticas con una colección de definiciones, teoremas, técnicas y aplicaciones. Luego que el Teorema de Barrow sea presentado en un curso de Cálculo, los estudiantes podrán comprender su relación con las etapas posteriores del curso, en las que se tratará el problema de la tangente, el área y las ecuaciones diferenciales, que permitirá relacionar tales problemas. Con este tratamiento temprano, los estudiantes estarán preparados para la versión moderna del Teorema Fundamental del Cálculo junto con pruebas analíticas que complementan el argumento geométrico de Barrow.

Luego de las anteriores consideraciones, se presenta la sección *What is Calculus?,* en la que se afirma que debido a que muchos libros y cursos llevan el nombre de Cálculo y en estos no explican el por qué precisamente se llama así y mucho menos lo que significa, en esta sección se intentará decir algo acerca de lo que es Cálculo y de lo que eran las matemáticas antes del surgimiento de este. Cualquier Cálculo es un método sistemático para llegar a un resultado, es por esto que existen una gran variedad de Cálculos; sin embargo cuando mencionamos Cálculo diferencial, integral y de series infinitas, hacen referencia al Cálculo de Newton y Leibniz. Para el autor el Cálculo hace referencia al análisis del cambio y determinación de elementos como la tangente a una curva, el área de una región plana encerrada por una curva, las estimaciones y soluciones exactas de muchos problemas relacionados.

Consideremos brevemente el problema de la recta tangente y del área, el problema general de la tangente es encontrar un método para dibujar una línea tangente a una curva en un punto específico y el problema del área puede ser considerado como un problema de medición en la actualidad, pero en un temprano tratamiento fue también geométrico. Uno de los más importantes resultados del Cálculo fue conectar directamente el problema de la tangente con el del área, lo que en la actualidad es el Teorema Fundamental del Cálculo. Este resultado fue conocido por Barrow y se conoce como el Teorema de Barrow, en la prueba original de este no se hace uso del álgebra, debido a que es una prueba de tipo netamente geométrico. Al llegar Newton y Leibniz a la versión algebraica de este resultado, es cuando se evidencia la utilidad del Teorema de Barrow y exploraron métodos para un Cálculo que resolvió sistemáticamente problemas de área, volumen, longitud de arco, etc.

Estos problemas y muchos otros de actual interés se resolverán a medida que avanzamos en nuestro estudio del Cálculo:

1. El problema de la tangente: Determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.
2. El problema de la velocidad: Determinar la velocidad instantánea de un objeto en movimiento.
3. Problemas de extremos: Determinar los valores máximos y mínimos de una variable dependiente.
4. El problema de área: Determinar el área de una región plana encerrada por una curva.
5. El problema de la longitud de arco: Determinar la longitud de una curva.
6. La tangente a una curva: Determinar una curva, de manera que la tangente a esa curva en cualquier punto, esta predeterminado.
7. El problema de la posición: Determinar la posición de un objeto en movimiento sobre una línea, conociendo su posición inicial y su velocidad instantánea.

Enseguida se presenta la prueba geométrica del Teorema de Barrow: Suponga que una curva A tiene una longitud PX igual al área de la región plana encerrada por la curva Y, el eje x y el segmento XQ. Si se escoge un punto T sobre el eje x, de manera que TX veces XQ es igual a PX, entonces la línea TP es tangente a la curva A en el punto P.

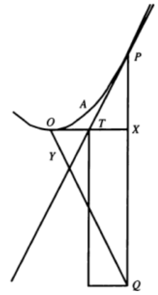


Figura 43: Teorema de Barrow

Prueba: Barrow muestra que TP es tangente a la curva A en el punto P, demostrando que para cualquier otro punto R sobre la curva A la recta TP no pasa por R. Por conveniencia se asume que X aumenta, así como la longitud de XP aumenta y R esta antes de P sobre la curva A. Si trazamos una recta paralela al eje x y que pase por R, se intersecara con la recta TP en el punto s y con la recta XP en el punto U.

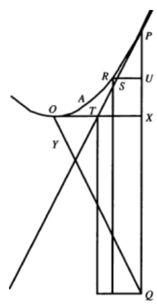


Figura 44: Prueba Teorema de Barrow

Basta con mostrar que $R \neq S$

El triángulo TPX es semejante al triángulo SPU, entonces

$$QX = \frac{PX}{TX} = \frac{PU}{SU}$$

Multiplicando QX por SU obtenemos PU

Trazando una línea paralela a PXQ que pase por R, se intersecará con el eje x en V y con la curva Y en W, entonces la longitud de RV es igual a el área de la región plana encerrada por la curva Y, el eje x y el segmento WV. Como $RV = UX$ y ya que $PX = PU + UX$, PU tiene una longitud igual al área de la región encerrada por el segmento VW, VX, XQ y la curva Y entre Q y W. Pero esta región está contenida en el rectángulo determinado por VX and XQ, entonces PU es menos que el producto $QX \cdot VX$. Entonces se puede concluir que

$QX \cdot SU < QX \cdot VX$, por consiguiente $SU < QX$. Pero $VX = RU$ entonces $SU < RV$ y por tanto $R \neq S$.

Enseguida, a partir de las funciones cuadráticas de la forma $y = cx^2$, donde c es una constante, se proponen 5 problemas relacionados con el cálculo de áreas y tangentes.

En los comentarios finales, Flashman (1996) afirma que luego de mostrarles a los estudiantes el Teorema de Barrow en una etapa inicial del curso del Cálculo, se les recuerda de su relación con el cálculo en etapas posteriores del curso, para destacar cómo los elementos clave de esta teoría encaja con las nuevas teorías. La relación entre el problema del área y el problema de la tangente, dio lugar a declaraciones y pruebas contemporáneas del Teorema de Barrow como el Teorema Fundamental del Cálculo.

3.6.2 Análisis

Teniendo en cuenta los elementos de la historia que presenta Flashman (1996) encontramos que en esta propuesta usan de la historia lo siguiente:

- El Teorema de Barrow, expuesto por el matemático ingles Isaac Barrow y en el cual se evidenciaba la relación que existe entre el problema de calcular cuadraturas y tangentes. En la prueba original de este teorema no se hace uso del álgebra, debido a que es una prueba de tipo geométrico solamente; cuando Newton y Leibniz llegaron a la versión algebraica de este resultado, fue cuando se evidencio la utilidad de tal teorema.

En esta propuesta el autor afirma que en los cursos de precálculo el problema del área y su relación con la tangente no son tratados a fondo, en consecuencia cuando inician un curso de Cálculo el conocimiento sobre estos problemas es mínimo; es por esto que se propone presentar a los estudiantes el Teorema de Barrow en un curso temprano de Cálculo, para que de esta manera en las etapas posteriores al curso, los estudiantes puedan relacionar el problema del área con el problema de la tangente y de esta manera, estar preparados para la versión moderna del Teorema Fundamental del Cálculo, junto con pruebas analíticas que complementan el argumento geométrico de Barrow. En este contexto se evidencia que la presentación a los estudiantes del *Teorema de Barrow* tiene como finalidad la introducción al Teorema Fundamental del Cálculo, en el que se evidencia la relación entre el cálculo de la integral y la tangente; teniendo en cuenta lo anterior podemos afirmar que el desarrollo de la propuesta corresponde a la categoría de análisis Alusión a la historia de las matemáticas.

Por otro lado también observamos que a pesar de que el uso del Teorema de Barrow puede darse para motivar o introducir el estudio del Teorema Fundamental de Cálculo, en esta propuesta el *Teorema de Barrow* no se limita a ser simplemente presentado a los estudiantes. El autor luego de realizar la demostración geométrica del Teorema, propone 5 ejercicios en los cuales los estudiantes deberán usarlo y los demás que este implica, para así llegar a una solución acertada de cada ejercicio. Por lo anterior consideramos que el autor pretende en los estudiantes generar una comprensión efectiva del Teorema de Barrow, los resultados que este implica y su relación con otros conceptos del Cálculo; por esta razón también consideramos que esta propuesta puede corresponder a la categoría de análisis de Integración de la historia de las matemáticas.

3.7 INTEGRATION À LA FERMAT

3.7.1 Resumen

La propuesta de Gellasch (2011) inicia con una introducción en la que se afirma que muchos libros sobre Cálculo integral, se centran en la integral de Riemann cuando se introduce el concepto de integral. Una vez que se introduce la notación y la idea abstracta de que un área está compuesta de infinitos hilos infinitamente delgados, muchos libros inician directamente con las técnicas de integración. Encontrar áreas utilizando rectángulos generalmente no se menciona de nuevo excepto en una revisión para ayudar a los estudiantes a visualizar un ejemplo más difícil. Gellasch está de acuerdo en introducir la integral de esta manera, sin embargo afirma que no hay razón para parar allí e ir directamente a las técnicas de integración. Antes de Riemann, Newton y Leibniz, Fermat encontró áreas usando la suma de rectángulos delgados, pero los rectángulos de Fermat no tenían ancho uniforme; el ancho de los rectángulos de Fermat disminuye con base a una serie geométrica. Mirando el método de Fermat luego de introducir la integral de Riemann, se puede ampliar la perspectiva del Cálculo por parte de los estudiantes; puesto que el método de Fermat incorpora muy bien otros métodos como sumas de series, factorización, límites y por supuesto, historia.

En el apartado *Historical Background***,** se afirma que la primera formulación moderna de integral fue dada por Agustin-Louis Cauchy (1789-1875), en su trabajo da una definición de integral definida usando el valor medio de la función dentro de cada sub intervalo, también se da a conocer la noción moderna de continuidad y continuidad uniforme, explicitando también el Teorema Fundamental del Cálculo. Riemann (1826-1866) generaliza la integral de Cauchy para hacer riguroso el Cálculo integral. En la actualidad la mayoría de textos al introducir la integración, atribuida a Riemann, no usan la definición de Cauchy. Sin embargo, este enfoque tiene el beneficio de iniciar conceptualmente más fácil y permite una discusión conveniente de error. Antes que Cauchy y Riemann e incluso antes que Newton y Leibniz, muchos matemáticos como Fermat, trabajaron en encontrar métodos para determinar áreas debajo de curvas definidas, apartados del uso de límites.

Fermat (1601-1665) es reconocido por sus trabajos en teoría de números, contribuciones a la probabilidad y algunas cuestiones físicas; sin embargo muchos sienten que sus trabajos sobre máximos, mínimos, tangentes y cuadraturas fueron fundamentales para el desarrollo del Cálculo; tanto así que Boyer afirmó que "ningún matemático con excepción de Barrow, estuvo tan cerca de la invención del Cálculo como Fermat".

En el apartado *Fermat On Quadrature*, se afirma que Fermat para el año 1636 probablemente había encontrado la forma de calcular el área bajo curvas de la forma $y = \frac{1}{x^n}$ en el intervalo $(1, \infty)$. Para 1644, Fermat tenía un método para encontrar el área debajo de la curva $y = x^n$ para exponentes racionales (excluyendo -1).

Fermat inicia su investigación de las curvas de la forma $y = x^n$ dividiendo el área en rectángulos de anchura uniforme, basando sus trabajos en Arquímedes, es por esto que inscribía y circunscribía su curva con un finito número de rectángulos. El área de la curva $y = x^n$ tiene una longitud infinita pero un área finita, es por esto que Fermat se da cuenta que necesita un número infinito de rectángulos para recubrir una longitud infinita, ¿pero cómo va sumar las áreas de sus infinitas series de áreas? Fermat usa una progresión geométrica que determinará el ancho de sus rectángulos, enseguida mapea el intervalo (a, ∞) sobre el intervalo $(0, a)$. Él tenía en el límite la gráfica de $y = x^n$ en el intervalo $(0, a)$ para una integral positiva n; en este caso los anchos decrecen de derecha a izquierda. Fermat extiende su argumento para las potencias racionales positivas $n = \frac{p}{q}$

En el apartado *In The Classroom*, el autor afirma que el camino más fácil para introducir el método de Fermat en la clase de Cálculo, es directamente después de introducir la integral de Riemann. Una vez que los estudiantes se sientan cómodos con el método de Riemann, se pregunta si es necesario que los rectángulos tengan un ancho uniforme; luego de unos minutos de discusión, el trabajo de Fermat se presenta en un estilo Socrático. Vamos a presentar dos opciones, primero vamos a presentar un caso concreto para $n = 2$ (la parábola), según Gellasch (2011) se ha descubierto que trabajar un ejemplo concreto en la clase va bien al tiempo que permite generalizar y hacer discusiones. El caso general n, puede ser realizado por los estudiantes si el tiempo y el interés lo permiten. Tenga en cuenta que lo que sigue es la presentación moderna de lo que Fermat hizo y no como aparece en este trabajo, puesto que estaba trabajando en una era antes del uso del límite.

En el apartado *Taking It Further*, se afirma que los problemas de cuadraturas para las curvas $y = x^n$ y $y = x^{\frac{p}{q}}$ por medio de rectángulos de ancho uniforme y rectángulos con ancho a partir de una progresión geométrica, pueden ser llevados a clase, sin embargo el caso de la parábola es el más fácil y rápido, los otros casos pueden ser desarrollados en clase o asignados como un proyecto.

En el apartado ***Open Question For The Classroom,*** Se presentan diferentes preguntas para realizar a los estudiantes y las posibles respuestas a tales preguntas. Hay diferentes caminos para presentar el trabajo de Fermat, a continuación se muestra una lista general (cada idea puede ser adaptada para los libros de texto y tópicos cubiertos en clase):

1. Presentar el problema de encontrar el área bajo la curva como $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [0,1]
2. En las secuencias del Cálculo, cortos módulos de historia pueden ser incorporados centrándose en cada uno de los prominentes matemáticos que contribuyeron al desarrollo del Cálculo. Fermat puede ser presentado en un temprano Cálculo Diferencial y luego en el Cálculo Integral.
3. Para una clase más avanzada, se presenta la idea de rectángulos con ancho decrecientes y se pueden tener estudiantes trabajando en grupo para redescubrir las técnicas de Fermat. En una avanzada clase el uso de una progresión geométrica es todo lo que podría necesitarse, los estudiantes pueden dar un ejemplo concreto como $y = x^2$ o $y = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0,1]$, seguido de la cuestión general de $y = x^n$ en el intervalo $[0, a]$.

Como conclusión Gellasch (2011) afirma que para presentar un poco de historia en el currículo de la licenciatura de matemáticas, proporcionamos a nuestros estudiantes una visión dentro de los métodos y usos de matemáticos anteriores. Presentando el método de Fermat damos la oportunidad a los estudiantes de atestiguar y explorar las matemáticas como una herramienta para responder diferentes problemas y no como un conjunto de herramientas usadas para resolver ejercicios de libros. El método de Fermat sobre los rectángulos decrecientes muestra la flexibilidad de las matemáticas. Dejando que los estudiantes experimenten una variedad de enfoques históricos permiten una mayor comprensión de las matemáticas e interés en sus tópicos.

3.7.2 Análisis

Teniendo en cuenta los elementos de la historia que presenta Gellasch (2011) encontramos que en esta propuesta usan de la historia lo siguiente:

- La presentación moderna de los trabajos sobre cuadraturas realizados por Fermat, específicamente la solución para hallar el área bajo la curva $y = x^n$ de manera general y específicamente cuando $n = 2$ sobre el intervalo $[0, a]$

Para responder a la pregunta ¿Cómo es usada la historia de la integral en esta propuesta?, debemos tener en cuenta la intención y el desarrollo de la propuesta. El autor propone introducir el método de Fermat en la clase de Cálculo, directamente después de introducir la integral de Riemann y antes de ir a las técnicas de integración como es común en los libros de Cálculo. Según Gellasch (2011), el método de Fermat puede ampliar la perspectiva del Cálculo por parte de los estudiantes, dado que este método incorpora muy bien otros métodos como sumas de series, factorización, límites y por supuesto historia. Teniendo en cuenta lo anterior, observamos que la intención del autor no es simplemente introducir los métodos de Fermat de forma alusiva, por el contrario el autor considera que al exponer a los estudiantes a una variedad de enfoques históricos lograran una mayor comprensión de las matemáticas e interés en sus tópicos; es por esto que dado que se pretende una enseñanza efectiva de las matemáticas a través de su historia, esta propuesta corresponde a la categoría de análisis Integración de la Historia de las Matemáticas.

3.8 LA HISTORIA COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA: EL CONCEPTO DE INTEGRAL

3.8.1 Resumen

La propuesta de Fernández (2011) inicia con una breve introducción en la cual se exponen los primeros problemas que con el concepto de integral trataron de solucionarse, posteriormente hace énfasis en como el proceso que llevó al concepto de integral estuvo lleno de variadas interpretaciones, dificultades, razonamientos y situaciones que pueden complementar los conocimientos del docente, para así dar cabida a nuevas propuestas frente a la enseñanza del concepto. Se afirma que los problemas que dieron lugar a este a lo largo de la historia pueden ser una buena directriz y un valioso recurso didáctico; justifica la propuesta bajo el propósito de fomentar la reflexión y mostrar el valor de la historia como recurso didáctico, la autora menciona que a partir de los procesos intuitivos en el proceso de enseñanza-aprendizaje se estará utilizando la historia de las matemáticas para entender una idea difícil del modo más adecuado. También afirma que introducir en el aula la fenomenología que desempeñó un papel importante en el desarrollo conceptual de un objeto de estudio matemático puede constituir un elemento motivador que facilite la comprensión de los diferentes contenidos y que cambie la percepción de las matemáticas de una ciencia netamente abstracta a una ciencia viva. Enseguida muestra un recorrido histórico del concepto de integral hasta la definición de Riemann y posteriormente en su propuesta didáctica propone:

Área de polígonos: En esta primera parte de la propuesta la autora cuenta a los estudiantes que el concepto de integral surgió en la antigua Grecia ligado al cálculo de áreas, después plantea una serie de preguntas relacionadas con el tema, por ejemplo: Si la Razón de semejanza entre dos cuerpos es r, la razón entre sus áreas es r^2

Área de una circunferencia: En esta parte de la propuesta la autora parte del hecho que la fórmula del área de la circunferencia es ya conocida por los estudiantes y en seguida les plantea la siguiente pregunta: ¿Cómo se obtiene esta fórmula? A continuación ella narra a los estudiantes el cómo Arquímedes aproximaba el área de la circunferencia por medio de polígonos inscritos y circunscritos y en seguida plantea las preguntas: ¿Sabrías explicar por qué utiliza polígonos inscritos y circunscritos? ¿Qué podemos afirmar a partir de esta construcción? Para avanzar, la autora les solicita a los estudiantes que verifiquen sus conclusiones por medio del software Geogebra aunque no les orienta frente a la construcción misma. En seguida les pregunta a los estudiantes cuál sería el área de un cuarto de círculo que tiene un radio de 10 unidades y les presenta un método que les permite aproximar dicha área por medio de rectángulos inscritos aduciendo este método al hecho de que el área del rectángulo es ya conocida y sencilla de calcular; en seguida lleva a los estudiantes a concluir que la suma de las cantidades que representan el área de los rectángulos se acerca cada vez más, a medida que los rectángulos aumentan, al área del sector circular, finalmente les pide a los estudiantes que realicen el mismo procedimiento anterior pero con rectángulos circunscritos y solicita a los estudiantes hacer conjeturas frente a la relación existente entre el área del sector circular y el área de los rectángulos descritos anteriormente, conjeturas que deben verificar por medio del software.

Integral definida y concepto de área: En esta parte de la propuesta la autora afirma que el problema del cálculo de área se puede generalizar al calcular el área limitada por la gráfica de una función: el eje X y dos rectas $x = a\ y\ x = b$ por lo que les solicita a los estudiantes que hallen el área limitada por diferentes funciones, el eje x y diferentes rectas; por ejemplo: $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 4$, luego la autora define la integral definida de una función continua en un intervalo $[a, b]$ de la siguiente manera:

Es el área orientada limitada por la gráfica de una función $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a\ y\ x = b$, después de haber explicado cuál es el significado del concepto de área orientada, la autora define las siguientes propiedades:

Si $h(x) = f(x) + g(x)$, entonces

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$$

Si $f(x) < g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x) < \int_a^b g(x)$$

Después de introducir el concepto de integral definida la autora prosigue formalizando el método de cálculo por medio de rectángulos:

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes eligiendo $n + 1$ puntos $x_0, x_1 \dots x_n$ tales que

$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ El conjunto $P = \{x_0, x_1 \dots x_n\}$ se denomina partición del intervalo. Ahora, se define la suma inferior de Riemann y la suma superior de Riemann:

$$s(F, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}), S(F, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$

Donde m_i y M_i son respectivamente el mínimo y el máximo de los valores de la función F en el subintervalo $[\,x_{i-1} - \,x_i]$.

Si los límites de ambas sumas existen y son los mismos entonces

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} s(F, P) = \lim_{s(F,P)} S(F, P)$$

Adelante la autora afirma que con esta definición de integral definida y con el método que los estudiantes conocen para encontrar su valor pueden verificar las siguientes propiedades:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$si\ c\ \in (a, b), entonces \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b rf(x)dx = r\int_a^b f(x)dx$$

Interpretación física y geométrica de la integral: En esta parte de la propuesta la autora plantea la siguiente actividad para que los estudiantes puedan ver una interpretación física de la integral además de la interpretación geométrica vista anteriormente: Un talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente. Estas son las gráficas *tiempo-velocidad* de ambos movimientos:

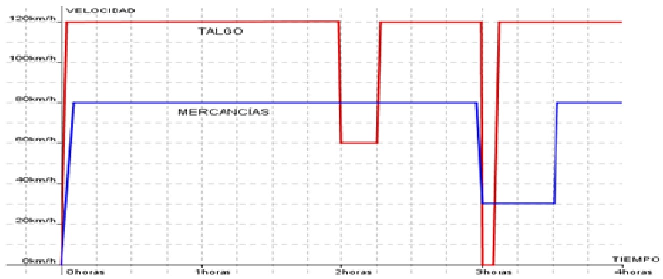


Figura 45: Tiempo-Velocidad

Como podemos ver en la gráfica, el talgo, a las dos horas, reduce su velocidad ¿A qué puede deberse? ¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren en ese instante? A las tres horas, ambos trenes modifican su marcha: el talgo se detiene por breves minutos, mientras que el tren de mercancías va muy despacio durante media hora. Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:

- El talgo, durante dos horas, va a 120 Km/h ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?
- De 2 a 2 1/4, el talgo disminuye su velocidad ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?
- El tren de mercancías aminora la marcha a las tres horas ¿Qué distancia ha recorrido hasta este momento?
- ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que baja la velocidad?
- ¿A qué distancia de la estación de salida está otra en la que para el talgo?
- compara los resultados obtenidos con las áreas bajo las gráficas.

La medida de una variable continua: En este apartado la autora comienza por señalar cómo el apartado anterior le permitía a los estudiantes advertir que el área bajo la gráfica de tiempo y velocidad coincidía con el espacio recorrido; también afirma que Kepler, Galileo, Cavalieri entre otros consideraron el área como un conjunto infinito de unidades o segmentos rectilíneos indivisibles. Para la autora esta visión le permite al estudiante comprender la integral como el promedio de una variable continua, para el cual plantea un problema en el que se debe hallar el consumo de energía en un intervalo de tiempo determinado y el promedio de dicho consumo durante todo el día.

Primitivas e integral indefinida: En este apartado se parte del hecho de que la integral definida ya es conocida por los estudiantes y se pide que calculen algunas de ellas. Estos ejercicios tienen como fin que los estudiantes adviertan la relación existente entre la integral y la derivada e inmediatamente pasa a mostrar el primer Teorema Fundamental del cálculo de la siguiente manera:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ entonces la función área $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable y $F'(x) = f(x), x \epsilon (a, b)$ además afirma que dado el Primer Teorema Fundamental del Cálculo se puede verificar que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$$

Lo cual afirma la autora, se conoce como regla de Barrow o Segundo Teorema Fundamental del cálculo y que este nos permite reducir el problema del cálculo de integrales definidas a la búsqueda de una función primitiva. A continuación la autora asevera que si aplicamos este resultado a algunas funciones fundamentales obtenemos reglas de integración como las siguientes:

- Funciones constantes: $[cx]' = c \Rightarrow \int cdx = cx + k$

- Funciones potenciales:
  $[x^{n+1}]'=(n+1)x^n si\ n \neq -1 \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k\ si\ n \neq -1$; $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}\ si\ n = -1 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = [\ln|x|] + k\ si\ n = -1.$

- Funciones exponenciales :
  $[a^x]'= a^x \ln a \Longrightarrow \int ax\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + k, [e^x]' = e^x \Longrightarrow \int e^x dx = e^x + k.$

- Funciones trigonométricas :
  $[cos(x)]' = -\sin(x) \Rightarrow \int \sin x = -\cos(x) + k, [\sin x]' = cos(x) \Longrightarrow$+k,
  $[\tan x]'=\frac{1}{\cos^2(x)} \Longrightarrow \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan x + k.$

Y al final de este apartado se introducirán los métodos de integración de funciones racionales, de cambio de variable y de integración por partes, aunque no son detallados por ser considerados por la autora como procesos rutinarios.

El movimiento: En este apartado se afirma que el movimiento es uno de los problemas en los que surge la necesidad del concepto de integral, razón por la cual considera necesario formalizar lo visto en el apartado número cinco, de la siguiente manera:

Primero le describe a los estudiantes cómo para determinar la velocidad de un coche en un instante t se debe hacer que el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ tienda a cero:

$$v = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_1, t_2}$$

Enseguida dice que por definición esta es la derivada de la función $F(t)$ en un punto t_1 por lo que se ha conseguido que la velocidad del coche en el instante t coincida con la derivada de la función que nos proporciona la posición en función del tiempo; lo cual le da la oportunidad de preguntar: ¿podríamos obtener la posición del coche en un instante dado conociendo su velocidad y su instante de partida? Más a delante la autora proporciona dos ejercicios en los cuales se puede evidenciar la relación entre el concepto de integral y el movimiento; una de ellas es la siguiente:

Interpreta la siguiente gráfica e indica la distancia a la que se encuentra el móvil del punto de partida en el instante $t = 30$

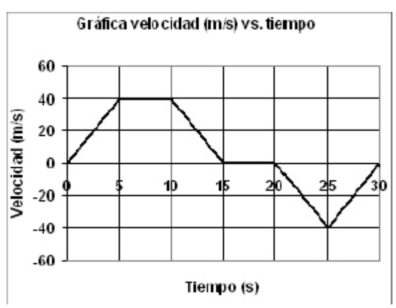


Figura 46: Velocidad vs Tiempo

Según la autora esta actividad tiene como finalidad que los estudiantes identifiquen el área con el espacio recorrido y la velocidad negativa con la dirección del móvil hacia el punto de partida.

Aplicación al cálculo de áreas y volúmenes: En este apartado la autora parte por recordarle a los estudiantes que ya se vio anteriormente que la integral definida me permitía calcular áreas de la siguiente manera:

$$Área = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Luego realiza unos ejemplos en los cuales se puede ver cómo proceder cuando la función cambia de signo en un intervalo, uno de ellos es el siguiente:

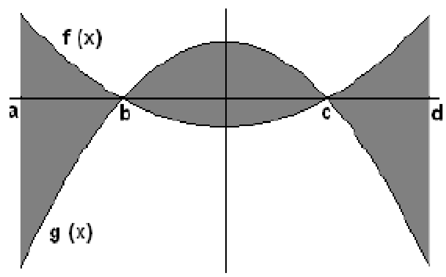


Figura 47: Grafica de $\boldsymbol{f(x)\ y\ g(x)}$

Consideremos las funciones $f(x)\ y\ g(x)$ cuyas gráficas hemos representado, comprueba utilizando el principio de Cavalieri que el área encerrada entre estas dos gráficas coincide con el área encerrada entre las gráfica de $f(x) - g(x)$ y el eje x.

En este apartado se muestran problemas acerca de solidos de revolución: A veces se hacen estudios de marketing para analizar el gusto de los consumidores por la forma de los envase. De los modelos utilizados en el estudio, la figura adjunta muestra el lateral de una de las botellas de vidrio más aceptada en el mercado de consumo para envasar cierto producto. Este perfil es la representación gráfica de la función $f(x) = a(x - 0.1)^2(x - 1)^2((x - 2)^4 - 0.04) + 0.31$ en $[0.2]$ para $a = {}^3\!/_4$. Halla el valor de a para que la capacidad de la botella sea $\frac{3}{4}$ de litro.

El área del círculo y la elipse: En este apartado la autora muestra cómo se puede obtener el área de un círculo o de una elipse por medio de la ecuación de cada una de estas y el uso de la integral. Veamos como lo hace para el área de una elipse:

Ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$Área\ de\ la\ elipse = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

$$= \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, \mathrm{a}\cos(t)\, dt$$

$$= \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\; \cos(t) dt$$

$$= \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2(t)\; dt$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= 4ab\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin^2 2t}{4} + c\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

Para terminar este apartado se afirma que no se hace necesario el uso de la integral para hallar dichas superficies y muestra maneras alternativas de encontrar el área de un círculo y una elipse.

Integración numérica: Para finalizar esta propuesta didáctica la autora afirma que gracias a los ordenadores actuales, se pueden realizar muchos cálculos en poco tiempo, razón por la cual uno de los métodos más sencillo de integración consiste en aproximar la integral$\int_a^b f(x)dx$ con el área del rectángulo de base $b-a$ y altura $f(a)$

$$\int_a^b f(x)\, dx \sim (b-a)f(a)$$

Si se divide el intervalo en n partes iguales, se aplica esta regla en cada uno de esos subintervalos y se suman, obtenemos que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_i-1}^{x_i} f(x)dx \sim \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

Para terminar este apartado la autora les solicita a los estudiantes que aproxime la integral $\int_a^b \sqrt{x-1}\, dx$ con un decimal exacto, utilizando una hoja de cálculo.

3.8.2 Análisis

En este artículo se evidencia claramente como (Fernández, 2011) hace uso de los siguientes recursos históricos para abordar la enseñanza de la integral:

- Orden histórico de los avances: La autora tienen en cuenta en su propuesta las aportaciones que se realizaron a lo largo de más de 20 siglos, dando comienzo por el área de figuras planas, el área bajo la curva y terminando con lo que ella llama "procedimiento de paso al límite".

- El área como uno de los problemas primarios frente al concepto de integral: Para hacer uso de esto la autora en primera instancia hace alusión a la historia y plantea ejercicios que le permitirán al estudiante poseer herramientas para afrontar problemas similares a los que se enfrentaron en el desarrollo histórico del concepto de integral como lo es la cuadratura del círculo.

- Área bajo la curva: La autora presenta en esta parte de su propuesta un método que permite aproximar el área bajo una curva por medio de rectángulos así como fue hecho por diferentes matemáticos a lo largo del desarrollo histórico de la integral.

- Definición de la integral definida a partir del cálculo de áreas: a partir del cálculo de áreas se origina el problema de áreas "negativas", el cual aprovecha la autora para introducir la definición de la integral definida, para así hacer del estudio de esta algo menos informal.

- Suma inferior de Riemann y suma superior de Riemann: Por medio de la integral definida y una generalización de lo visto en el apartado II de la propuesta didáctica, la autora define la suma inferior y superior de Riemann.

En esta propuesta, identificamos que el orden histórico de los avances hacia el concepto de integral, es la directriz que tiene la autora para plantear las diferentes actividades a lo largo de la propuesta. Por ejemplo propone a los estudiantes realizar actividades de áreas que los lleven a la postre aborda situaciones similares a las que abordaron los griegos frente al problema de la cuadratura del círculo y así sucesivamente hasta llegar a las sumas de Riemann. Por lo anterior evidenciamos que existe una fundamentación en la Historia de las Matemáticas para la organización; es por esto que consideramos que la propuesta corresponde a la categoría de análisis Determinación de la enseñanza a partir de la Historia de las Matemáticas.

En esta propuesta también identificamos que el uso de la historia que contempla la autora se puede clasificar en la categoría de análisis Integración de la Historia de las Matemáticas, puesto que la autora lleva al aula las situaciones a las cuales se enfrentaron diferentes matemáticos a lo largo de la historia de la integral, por ejemplo la autora lleva al aula el método que permite aproximar el área bajo una curva por medio de rectángulos o la definición de la integral definida por medio del cálculo de áreas.

3.9 THE HISTORY OF MATHEMATICS AS A PEDAGOGICAL TOOL: TEACHING THE INTEGRAL OF THE SECANT VIA MERCATOR'S PROJECTION

3.9.1 Resumen

En el artículo de Haverhals & Roscoe (2010) se hace uso de la historia como herramienta pedagógica para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, en especial se basarán en la proyección de *Mercator* y su conexión con la integral de la función secante. Los apéndices contienen actividades que pueden ser implementas como una actividad de enriquecimiento en un curso de Cálculo.

En la introducción se menciona que la investigación en el uso de la historia en las clases de matemáticas no es escasa y por ello muchos autores muestran algunos beneficios de la utilización de la historia en el aula; por ejemplo: agudiza habilidades de resolución de problemas, establece una base para una mejor comprensión, ayuda a los estudiantes a hacer conexiones matemáticas, el reflejo de la interacción entre las matemáticas y la sociedad, incrementa la motivación, disminuye el miedo que se tiene hacia las matemáticas a través de la comprensión de que las matemáticas es una creación humana y que sus creadores lucharon para ello. Haverhals & Roscoe (2010, citando a Bidwell, 1993) menciona tres caminos para usar la historia en el aula:

- Presentación anecdótica: Cuenta con la visualización de imágenes de famosos matemáticos o hechos históricos en el aula.
- Inyección de material anecdótico: Realizar referencias históricos en los cursos
- Hacer estudios precisos de los temas en el curso: Esto describe mejor el contenido de este artículo.

En la metodología se menciona que la integral de la Secante jugo un papel clave en el desarrollo del mapa de *Mercator* en los siglos XVI y XVII, este mapa era fundamental debido a que es una proyección del globo terráqueo sobre un plano de tal manera que se preservan ángulos y otras medidas. Esta propiedad permite a los marineros navegar a través de grandes extensiones de océano siguiendo la brújula que el mapa proporciona. Los autores realizaron una revisión pertinente de la literatura para buscar material en el cual se tratara la proyección de *Mercator*, que se tradujo fácilmente en un entorno educativo donde la integral de la secante se enseña a través de la recreación histórica de su descubrimiento. Se decidió que se crearían dos documentos, el primero de ellos consiste en “llevar a casa” una cartilla sobre la proyección de *Mercator*, tal cartilla prepara el escenario para la investigación; en ella se da una breve descripción del problema de proyección conforme y motivada a la necesidad histórica de dicho mapa durante la época y el segundo documento que se produjo fue llamado exploración "en clase" de la integral de la Secante, con este, se espera llevar a los estudiantes a través de una " Recreación histórica " del descubrimiento de la integral de la secante motivado por un deseo de descripción matemática de la proyección de *Mercator*.

Una muestra de 16 estudiantes de licenciatura participaron en el estudio, ellos recibieron su documento “llevar a casa” una semana antes de entregar el segundo documento " en clase " el cual tenía previsto ser desarrollado en dos horas y en parejas. Después de una semana de la clase, dos grupos de cuatro estudiantes que fueron escogidos por separado, se les realizó aplicó una entrevista para analizar la reacción a la actividad educativa; a estos estudiantes se les pidió responder 7 diferentes preguntas; una de ellas, por ejemplo, fue: ¿usted estaba más o menos motivados para completar la prueba tradicional de la integral de la secante después de haber colocado su descubrimiento en un contexto histórico? Al segundo grupo se les muestra un modelo falso pero muy similar a la proyección de *Mercator*; a estos estudiantes se les pidió refutar el modelo físico utilizando los conocimientos adquiridos a través de la actividad educativa en la proyección de *Mercator*.

El uso de la historia en las clases de matemáticas cuenta con un amplio apoyo, sin embargo no es muy común que se aplique en realidad. Al respecto Haverhals & Roscoe (2010, citando a Siu, 2007) proporciona una lista de 16 factores desfavorables que contribuyen a la falta de historia en las clases de matemáticas, esta lista fue dividida en cuatro grupos de artículos relacionados y que se muestran a continuación:

1. Una respuesta filosófica a tres factores desfavorables

Lo factores desfavorables para el uso de la historia de las matemáticas en el aula están vinculados a cuestiones filosóficas sobre la naturaleza de las matemáticas y la enseñanza de las mismas. Es decir que en respuesta a la pregunta ¿por qué no utilizar la historia de las matemáticas en su salón de clases?, profesores a menudo revelan creencias personales acerca de las matemáticas y de cómo deben ser enseñadas. Específicamente la siguiente lista de tres de los factores desfavorables de Siu encaja en esta descripción:

- “No tengo tiempo para esto en clase”
- “Esto no es matemáticas”

- “El avance de las matemáticas es hacer los problemas difíciles rutina, entonces ¿por qué molestarse en mirar hacia atrás?

Muchos autores han escrito sobre la filosofía personal en la enseñanza de las matemáticas Paul Ernest (1998) en el marco de la filosofía de las matemáticas proporciona el enfoque más simplificado e identifica tres sistemas psicológicos de creencias sobre las matemáticas:

- Visión Instrumentalista
- Visión Platonista
- Visión de resolución de problemas

El enfoque histórico de la integral de la secante en este marco filosófico, está fuertemente asociado con la visión de resolución de problemas. La actividad se presentó al grupo de estudiantes como una introducción al problema de proyectar el mapa del globo esférico en un plano, las preguntas que se formularon eran de composición abierta y sin un enfoque algorítmico y el papel del profesor (en este caso de los autores) fue de facilitador y se espera que los estudiantes construyan su propio conocimiento a través de la investigación y participación activa. El valor de la integral de la secante que se presenta en los libros de Cálculo modernos, presenta una noción de las matemáticas “dinámica” en “expansión continua” y “abierta a la refutación y revisión”, como el enfoque de resolución de problemas que Ernest describe.

2. Respuestas de los estudiantes a factores desfavorables

Estos factores desfavorables del uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas se refieren a las creencias de los maestros con respecto a las opiniones de los estudiantes sobre el uso de ciertos materiales en el aula de clase. Las siguientes cuatro factores se refieren a esta descripción:

- “A los estudiantes no les gusta esto”
- “Los estudiantes consideran que es historia y ellos odian la clase de historia”
- “Los estudiantes consideran que es igual de aburrido como las matemáticas mismas”
- “Los estudiantes no tienen conocimientos generales sobre cultura para apreciarlo”

Este estudio, que coloca la integral de la secante mediante el desarrollo de la proyección de *Mercator*, encuentra una evidencia que disipa los factores previstos por Siu. Durante la actividad los estudiantes manifestaron una intensa curiosidad en la matemática detrás de la proyección de *Mercator* se analizaron las transcripciones de las entrevistas realizadas a los estudiantes para evidenciar a favor o en contra los factores de Siu señalados anteriormente y se encontró que los cuatro entrevistados responden favorablemente al enfoque histórico de la integral de la secante.

3. Una Respuesta Logística a Factores Desfavorables

La siguiente lista está compuesta por los factores que los autores describirían como logístico en la naturaleza; estos son factores que se podrían pensar, desalentarían incluso a los que están dispuestos a incluir la Historia de las Matemáticas en la enseñanza:

- ¿Cómo se puede establecer preguntas sobre esto en un test?
- No se puede mejorar la nota del estudiante
- Lo que ocurrió realmente puede ser bastante tortuoso, decirle a los estudiantes puede confundirlos en vez de iluminarlos
- ¿Realmente ayuda leer los textos originales? (lo cual es una tarea muy difícil).

Los autores creen sin embargo, que el modulo proporcionado sirve como un ejemplo para ver que estas preocupaciones pueden ser superadas. Aunque los autores hicieron todos los esfuerzos para hacer una actividad histórica precisa, gran parte de la dificultad histórica fue descrita en vez de ser recreada. Se les pidió a los estudiantes imitar el proceso de integración mecánica (probablemente antes de que se dieran cuenta que eso era lo que estaban haciendo) usado históricamente. Los estudiantes lograron identificar que los intervalos más pequeños dan mejores aproximación, visión necesaria para entender el vínculo entre la proyección de *Mercator* y la integral de la secante.

4. Una respuesta a los factores desfavorables de la preparación de clase

En este apartado se plantea una cuestión desde el punto de vista del profesor, al plantear que si los estudiantes pueden ser blindados de la dificultad para leer los textos originales, ¿no son los profesores los responsables para hacer este blindaje?, a lo cual los autores de esta unidad didáctica dan una respuesta parcializada. Este problema está ligado a los siguientes tres factores que Siu menciona:

- Hay una falta de materiales sobre esto
- Hay una falta de formación de los docentes en ella
- Yo no soy un historiador profesional en matemáticas ¿Cómo puedo estar seguro de la exactitud de la exposición?

La mayor parte del material que se hizo camino en la actividad, provino de artículos de revistas o de otros módulos de enseñanza relacionado con el tema. De esta manera, los autores no fueron responsables de tratar con la difícil tarea de leer el material original, más bien eran libres para concentrarse en la preparación del material de modo que fuera apropiado para los estudiantes.

5. Una respuesta a los dos últimos factores desfavorables

Los autores pensaron que los dos últimos factores no se relacionan estrechamente con los otros y serán abordados brevemente a continuación:

- ¿Es responsabilidad de criar un chauvinismo cultural y el nacionalismo parroquial?
- ¿hay una evidencia de que los estudiantes aprenden mejor cuando la Historias de las Matemáticas es usada en el aula?

El último factor desfavorable, es uno que los autores no pueden responder. Dentro de su experiencia, no hay evidencia empírica convincente de que los estudiantes aprenden mejor cuando la Historia de las Matemáticas se utiliza en el aula. Sin embargo, las respuestas de los estudiantes que se reunieron en este artículo, sugiere que los estudiantes le dan la bienvenida a la inclusión de la historia en el aula y que estudiantes más entusiastas se vuelven mejores alumnos.

Appendix 1 Student take home: Esta tarea inicia planteando a los estudiantes la situación de navegar desde Europa hasta el llamado “nuevo mundo” a través del Océano Atlántico, utilizando las herramientas del siglo XVI. Los marineros de este siglo llevaban sus barcos a lo largo de las líneas de rumbo constante que posteriormente se llamaron líneas loxodrómicas (se denomina loxodrómicas a la línea que une dos puntos cualesquiera de la superficie terrestre cortando a todos los meridianos con el mismo ángulo), es por esto que estas líneas se convirtieron en curvas de espirales. Debido a la naturaleza de estas líneas en espiral, crea una necesidad de un tipo especial de mapa en el cual un marinero puede trazar una línea desde su ubicación actual hasta su objetivo y medir el rumbo mediante la determinación de los ángulos que se forman con la ruta y los meridianos que se cruzan con dicha ruta. Dicho mapa se presentó al mundo en 1569 por Gerhardus Mercator y en la actualidad es conocida como la proyección de *Mercator*. Enseguida muestran dos mapas en los que encontramos la proyección de *Mercator* y un mapa de proyección plano, en los que se evidencia que en el mapa de proyección plano las líneas de latitud constante son uniformes y por el contrario en la proyección de *Mercator* las líneas de latitud constante crecen como una función desde la distancia del Ecuador. Para comprender mejor el efecto de la proyección de *Mercator* se propone a los estudiantes trazar una ruta desde Colón (Panamá) hasta Inglaterra, en esta actividad los estudiantes encuentran que un marinero haciendo uso de la brújula magnética (Estrella Norte) realiza con éxito este viaje siguiendo una línea de rumbo de 56º y sólo en la proyección de *Mercator* este ángulo coincide, por el contrario en el mapa de proyección plano afirman que el ángulo debe ser de 60º y si un marinero siguiera la línea de rumbo con este ángulo llegaría a Francia.

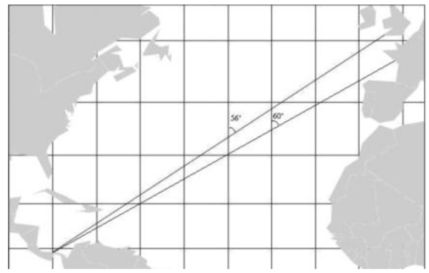


Figura 48: Proyección de *Mercator*

Es por esto que se hace evidente que la proyección de *Mercator* ofrece al marinero una herramienta mucho más útil, donde una línea de rumbo constante corresponde con una línea recta del mapa.

Appendix 2 Mercator in class activity: Este apéndice inicia con una lectura en la que *Mercator* explica por qué aumenta la distancia entre las líneas de latitud constante. Para saber que tanto deben ser ampliadas las líneas de latitud, se debe determinar la función que modela "el alargamiento de las rectas paralelas con respecto a la línea ecuatorial". Es decir, dada una recta paralela en una latitud θ determinar la función $f(\theta)$ que nos dice cómo deben ser estiradas las líneas de latitud horizontal para parecer igual en longitud a la línea del Ecuador.

No fue sino hasta 1610 que Edward Wright, profesor de matemáticas de la universidad de Cambridge y un consultor de navegación de la *East India Company*, describe la forma matemática para construir el mapa *Mercator* y producir una mejor aproximación que el original. En 1599 publicó Los errores en la navegación detectados y corregidos, Wright argumentó que con el fin de preservar ángulos en la proyección de *Mercator*, el factor de escala vertical tenía que ser el mismo que el factor de escala horizontal. Para visualizar este fenómeno imagino un ángulo de 45º dibujado en una pequeña parte de un globo. Recordemos que cuando esta región se prevé en el plano, se estira en la dirección horizontal por una cantidad que depende de la latitud y en consecuencia el ángulo que proyecta ya no es 45º. Para que el ángulo se preserve, un estiramiento debe ocurrir en la dirección vertical que coincide con el tramo horizontal.

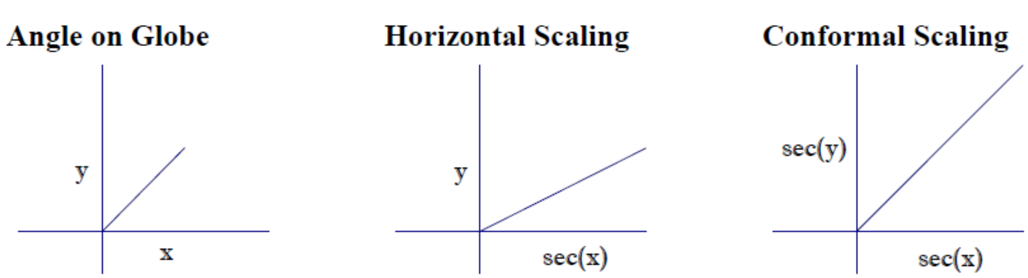


Figura 49: Factores de escala

Wright también se dio cuenta de que el intervalo correcto de la colocación de un paralelo en la proyección de *Mercator*, era el resultado de la adición de cualquier subintervalo en el que podría ser dividido. Para tal fin, Wright hizo una tabla de secantes tomadas en un intervalo común, añadió estos resultados y después multiplicó por la longitud del intervalo para así determinar la ubicación de una recta paralela en particular en el mapa.

Por lo tanto, si se desea la ubicación del paralelo 60^{th} y el ancho intervalo es de10º, Wright habría realizado lo siguiente:

Table of Secants	**Multiply by Interval Width**	**Location on Mercator Map**
Secant 10° = 1.0154	10° × 8.0954 = 80.954	Place the 60^{th} parallel at a location that is 80.954° north of the equator.
Secant 20° = 1.0642		
Secant 30° = 1.1547		
Secant 40° = 1.3054		
Secant 50° = 1.5557		
Secant 60° = 2.0000		
Total = 8.0954		

Figura 50: Tabla de Secantes

Enseguida se propone a los estudiantes usando el método de Wright, determinar la locación de diferentes paralelos usando un intervalo de longitud 5º. Luego de completar la tabla los estudiantes deben responder una serie de preguntas sobre esta.

El actual valor exacto de la integral fue descubierto por Henry Bond, comparando las tablas de Wright con la tabla de valores de:

$$\ln\left|\tan\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Que puede ser escrita como

$$(\ln|\sec\theta+\tan\theta|)$$

La primera prueba de la integral de la secante fue proporcionada en 1668 por James Gregory, sin embargo los autores optan por ofrecer una orientación a través de la prueba dada por Isaac Barrow. Enseguida se les pide a los estudiantes completar los pasos que faltan para realizar la integral de la secante, esta prueba tiene 14 pasos de los cuales 5 son dados por los autores.

Los autores comentan a los estudiantes que la integral está asumiendo la medida de los ángulos en radianes, entonces un cambio de variable producirá el siguiente resultado:

$$\int_0^{\theta} \sec\theta d\theta = \frac{180}{\pi}(\ln|\sec\theta + \tan\theta|)$$

Usando este resultado se les pide a los estudiantes que determinen la localización exacta en la proyección de *Mercator* de los siguientes paralelos y compararlos con los resultados anteriores:

Latitude on the Globe	Location on Mercator Projection
15°	
30°	
45°	
60°	
75°	
90°	

Figura 51: Actividad

La Actividad finaliza con una serie de preguntas abiertas para los estudiantes.

3.9.2 Análisis

En esta propuesta se evidencia un tipo diferente de historia de la que hemos visto en las propuestas anteriores y el aspecto histórico está más orientado a la historia de la navegación y como las matemáticas aportaron para el desarrollo de esta industria; sin embargo también encontramos un resultado asociado a la historia de la integral (en específico la integral de la Secante). A continuación se muestra los aspectos históricos que son usados en la propuesta de Haverhals & Roscoe (2010):

- Para el desarrollo del mapa de *Mercator* en los siglos XVI y XVII, los autores realizaron una revisión pertinente de la literatura para buscar material en el cual se tratara la proyección de *Mercator*, la cual fue trasladada en un entorno educativo con el fin de que la integral de la secante se enseñara a través de la recreación histórica de su descubrimiento.

- Los trabajos de Edward Wright quien describió la forma matemática para construir el mapa *Mercator* y producir una mejor aproximación que la original.

- Una reformulación moderna de la prueba de la integral de la secante realizada por Isaac Barrow, en la que los autores ofrecen a los estudiantes 5 pasos de la prueba y les proponen que la terminen.

A lo largo de la propuesta observamos que se mencionan algunas fechas, hechos y etapas relacionados con la historia de la integral de la secante. De estas menciones se destaca por ejemplo, el descubrimiento de la integral de la secante y cómo este suceso fue un componente importante en los avances de los estudios de la proyección cartográfica de *Mercator*; también se destaca una reformulación actual de la prueba realizada por Barrow y que los estudiantes deben completar. Para los autores esta propuesta contiene actividades que pueden ser implementas como una actividad de enriquecimiento en un curso de Cálculo, que muestra su relación con otras ciencias.

En el desarrollo de la propuesta podemos evidenciar que la Historia de las Matemáticas se usa para presentar a los estudiantes un ejemplo histórico de como las matemáticas permiten solucionar problemas de la cotidianidad del hombre y según esta idea, podemos concluir que la propuesta corresponde a la categoría de análisis Alusión a la Historia de las Matemáticas; sin embargo en la propuesta los estudiantes deben realizar ciertas lecturas y actividades que les permiten lograr una mayor comprensión de la integral de la secante; por ejemplo, el desarrollo de la prueba de Barrow. Es por esto que esta propuesta también debe corresponder con la categoría de análisis Integración de la Historia de las Matemáticas.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES

4.1 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON EL ANÁLISIS DE LAS PROPUESTAS

Después de realizar el análisis de cada una de las propuestas, se presenta una tabla en la cual se encuentran las propuestas, las categorías de análisis que son mencionadas en Mora & Guacaneme (2014) y una nueva categoría definida en este trabajo; esto con el fin de observar algunas relaciones entre las propuestas y tales categorías.

Tabla 5 Propuestas y Categorías de análisis

PROPUESTA	***Alusión a la historia de las matemáticas***	***Integración de la historia de las matemáticas***	***Determinación de la enseñanza a partir de la historia de las matemáticas***	***Determinación de nuevos estudios a partir de la historia de las matemáticas***
Geometric Demonstration of the Fundamental Theorems of the Calculus.		X		
Teaching The Calculus.	.	X		
Los indivisibles en el cálculo contemporáneo			.	X
Fermat y Arquímedes en las clases de integrales	X			
Historical motivation for a calculus course: Barrow's theorem	X	X		
Integration à la Fermat		X		
La historia como herramienta didáctica el concepto de integral		X	X	

The history of mathematics as a pedagogical tool: teaching the integral of the Secant via Mercator's projection	X	X		

Según la información de la tabla podemos concluir lo siguiente:

- Solo la propuesta Los indivisibles en el cálculo contemporáneo, corresponde a la nueva categoría de Determinación de nuevos estudios a partir de la historia de las matemáticas**.** Esto sucedió porque en las otras propuestas no se pretendía generar nuevos estudios o teorías a partir de algunos elementos de la historia o la reformulación de estos y que ampliara la percepción de los mismos.

- Solo la propuesta La historia como herramienta didáctica el concepto de integral corresponde a la categoría de análisis de Determinación de la enseñanza a partir de la historia de las matemáticas. Esto sucedió porque en ninguna otra propuesta percibimos que se fundamentaran tanto en la historia de las matemáticas para su organización y en esta propuesta observamos que los desarrollos históricos determinaron básicamente las actividades de la propuesta.

- Solo la propuesta de Fermat y Arquímedes en las clases de integrales corresponde únicamente a la categoría de Alusión a la historia de las matemáticas. Esta propuesta, como dice la autora, busca romper la monotonía de la clase llevando dos ejemplos históricos a la clase y no se hace una profundización que busque una mayor comprensión de los alumnos, por tanto solo se encuentra en la categoría de alusión.

- Cuatro propuestas están únicamente en la categoría de Integración de la historia de las matemáticas. En estas cuatro propuestas observamos que la intención de cada una de ellas era generar un conocimiento más profundo del concepto de integral, por medio del uso de algún o algunos elementos específicos de la historia y no se evidencia el uso de la historia como en las categorías de Alusión o Determinación.

- Las propuestas de *Historical motivation for a calculus course: Barrow's theorem* y *The history of mathematics as a pedagogical tool: teaching the integral of the Secant via Mercator's projection*, se encuentran simultáneamente en dos categorías de análisis: Alusión e Integración. Dado que en las propuestas se presentaron elementos de la historia para introducir un tema o ejemplos históricos de problemas matemáticos, decidimos ubicar estas propuestas en la categoría de alusión; sin embargo las propuestas también presentan cierto tipo de actividades que permitirán profundizar en un tema específico de la historia de la integral y lograr una enseñanza efectiva por medio de su uso.

- La propuesta de La historia como herramienta didáctica el concepto de integral, está simultáneamente en dos categorías: Integración y Determinación; como ya habíamos mencionado, la organización de las actividades de la propuesta está determinada por la historia y esto nos lleva a concluir que esta situación corresponde a lo que se describe en la categoría de Determinación; pero dado que las actividades propician la comprensión y motiva la aparición de nuevos conceptos e interpretaciones, consideramos que la propuesta también corresponde a la categoría de Integración.

4.2 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LAS PROPUESTAS

- Durante el desarrollo histórico que se realizó en el capítulo II, encontramos una etapa histórica nombrada como La integral como el cálculo de antiderivadas, cuyos principales exponentes fueron Barrow, Newton y Leibniz, los cuales descubrieron la relación que existe entre el cálculo de cuadraturas y el cálculo de tangentes. Por lo anterior, en el catálogo que se realizó en este trabajo encontramos propuestas como: *Geometric Demonstration of the Fundamental Theorems of the Calculus* y *Teaching The Calculus* de Richard Sauerheber y *Historical Motivation for a Calculus Course: Barrow's Theorem* de Martin Flashman; en las cuales podemos evidenciar que están enfocadas a hacer evidencia de la relación existente entre el cálculo de la integral y la derivada. En Sauerheber (2010) y Sauerheber (2012) observamos que esta relación se muestra a los estudiantes por medio del estudio del Primer y Segundo Teorema Fundamental del Cálculo en los trabajos de Newton, por otro lado en Flashman (1996) encontramos que muestra esta relación a través del *Teorema de Barrow* del que se puede afirmar que es la forma preliminar del Teorema Fundamental del Cálculo.
- En la búsqueda de las propuestas para este catálogo esperábamos encontrar aquellas en las que se evidenciaran contenidos respecto a la metodología, actividades específicas, objetivos, análisis de enseñanza y aprendizaje etc.; Algunas de las propuestas que se analizaron y resumieron en este trabajo, abordaron uno o varios de estos aspectos; sin embargo en las propuestas de Sauerheber no se logran

evidenciar con claridad estos aspectos, a pesar de ello las hemos incluido en este catálogo porque consideramos que en ellas podemos encontrar herramientas que nos permitirán generar actividades en las que según Sauerheber, a partir de la secuencia histórica de los métodos empleados por Newton, los estudiantes lograrán comprender los conceptos básicos del Cálculo en su origen y a partir de ello clarificar la relación que existe entre la integración y diferenciación y probar así la validez de algunas de sus reglas generales.

4.3 CONCLUSIONES FORMATIVAS

- Antes de realizar este trabajo, nuestro conocimiento en cuanto a la historia del Cálculo y en específico la historia de la integral era escaso, percibiendo quizás que la integral fue solamente una idea repentina asociada al estudio de unos muy pocos hombres y cuyos legados son el inicio y el final de la historia; sin embargo durante la realización del desarrollo histórico, comprendimos que la historia de la integral no inicia con los descubrimientos de los matemáticos de los siglos XVII y encontramos que muchos investigadores coinciden en que la historia de la integral se remonta muchos años antes en la antigua Grecia en donde los estudios sobre medición, desencadenaron su evolución y desarrollo, llevando el concepto de integral hasta las concepciones de la actualidad, que ciertamente sigue evolucionando debido a que este siempre tiene algo nuevo para ofrecer.

- Luego de realizar el desarrollo histórico y estudiar las propuestas que se describen y analizan en este trabajo, tenemos una postura más definida acerca del uso de la historia de las matemáticas para mediar su enseñanza y las diversas formas para llevarla al aula de clase. Consideramos que la historia nos ofrece diferentes interpretaciones de un concepto a través del estudio de su evolución, puesto que allí encontramos nociones intuitivas que se han venido desarrollando hasta llegar a conceptos formales; lo que es similar a las experiencias en las clases cuando los estudiantes inician sus primeros cursos de matemáticas. Cuando se lleva al aula las primeras nociones que puede tener un concepto, también se llevan los primeros problemas a los que se enfrentó la humanidad, bien sea en un contexto matemático o en uno en contexto real, haciendo posible mostrar los primeros pasos para el surgimiento de tal concepto. Estamos de acuerdo con la reflexión de Fernández (2011), quien afirma que cuando se usan los diferentes razonamientos que se han realizado a lo largo de la historia para dar respuesta a estos problemas, los estudiantes pueden llegar a comprender la naturaleza del razonamiento matemático, el cual tal vez no se prioriza en las aulas de clase debido a que los objetivos de enseñanza-aprendizaje están centrados a la memorización de definiciones y algoritmos.

- Aunque la línea de investigación Historia de las Matemáticas – Enseñanza de las Matemáticas es aceptada en el ámbito educativo, aún son muy escasos los trabajos reportados sobre el uso de esta en la enseñanza de la integral. Por lo anterior se hace una invitación a las personas que accedan a este trabajo, para que realicen diferentes propuestas haciendo uso de la historia de la integral con el fin de favorecer el aprendizaje del concepto, permitiendo que los estudiantes perciban la manera en que este surgió a lo largo de la historia de la humanidad, las necesidades a las que en diferentes momentos respondió y las diferentes perspectivas de acuerdo a su evolución.

BIBLIOGRAFÍA

Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M., & Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid, España: Síntesis.

Bobadilla, M. L. (2012). *Constitución histórica de la teoría de la medida y la integral de lebesgue: Un tránsito entre lo geométrico y lo analítico*.Tesis de doctorado. Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Escudero, M. (1997). Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. *SUMA*, 24, 77–79.

Fernández, L. (2011). *La Historia como herramienta didáctica : el concepto de integral*. Tesis de maestría.Universidad de Cantabria, España.

Flashman, M. E. (1996). Historical Motivation For A Calculus Course: Barrow's Theorem. In R. Calinger (Ed.) *Vita Mathematica*: *Historical research and Integration with Teaching* (pp.309-316). Washington D. C: The Mathemetical Association of America.

Gellasch, A. shell. (2011). Integration a la Fermat. In D. Jardine & A. S. Gellasch (Eds.), *Mathemtical Time Capsules* (pp. 111–116). Washington D. C:The Mathemetical Association of America.

González, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *SIGMA*, *33*, 101–130.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*, *45*, 17–28.

Haverhals, N., & Roscoe, M. (2010). The History of Mathematics as a Pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via *Mercator*'s projection. *Montana Mathematics Enthusiast*, *7*(2-3), 339–368.

Montilla Erazo, J. D. (2014). *El Problema Del Área: De La Medida Relativa A La Medida Abstracta*. Tesis de pregrado.Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Mora, L., & Guacaneme, A. (2014). La Historia de las Matemáticas como organizador curricular a favor del Conocimiento Didáctico del Contenido. *XII COLOQUIO*

REGIONAL DE MATEMÁTICAS Y II SIMPOSIO DE ESTADÍSTICA.Nariño, Colombia: Universidad de Nariño.

Moran Pizarro, D. S. (2014). *De La integral Como Herramienta A La integral Como Noción Formal: De Las Cuadraturas A La integral De Cauchy*. Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Prabhu, V., & Czarnocha, B. (2008). Los indivisibles en el cálculo contemporáneo. *Educación Matemática*, *20*(1), 53–88.

Sauerheber, R. D. (2010). Geometric Demonstration of the Fundamental Theorems of the Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(3), 397–403.

Sauerheber, R. D. (2012). Teaching the Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(1), 85–100.

Suárez, M. M. (2008). Orígenes del Cálculo Diferencial e integral. *Universidad de Granada*, España.

Zapico, I. (2006). Enseñar matemática con su historia. *Premisa*, *8*(29), 3–8.